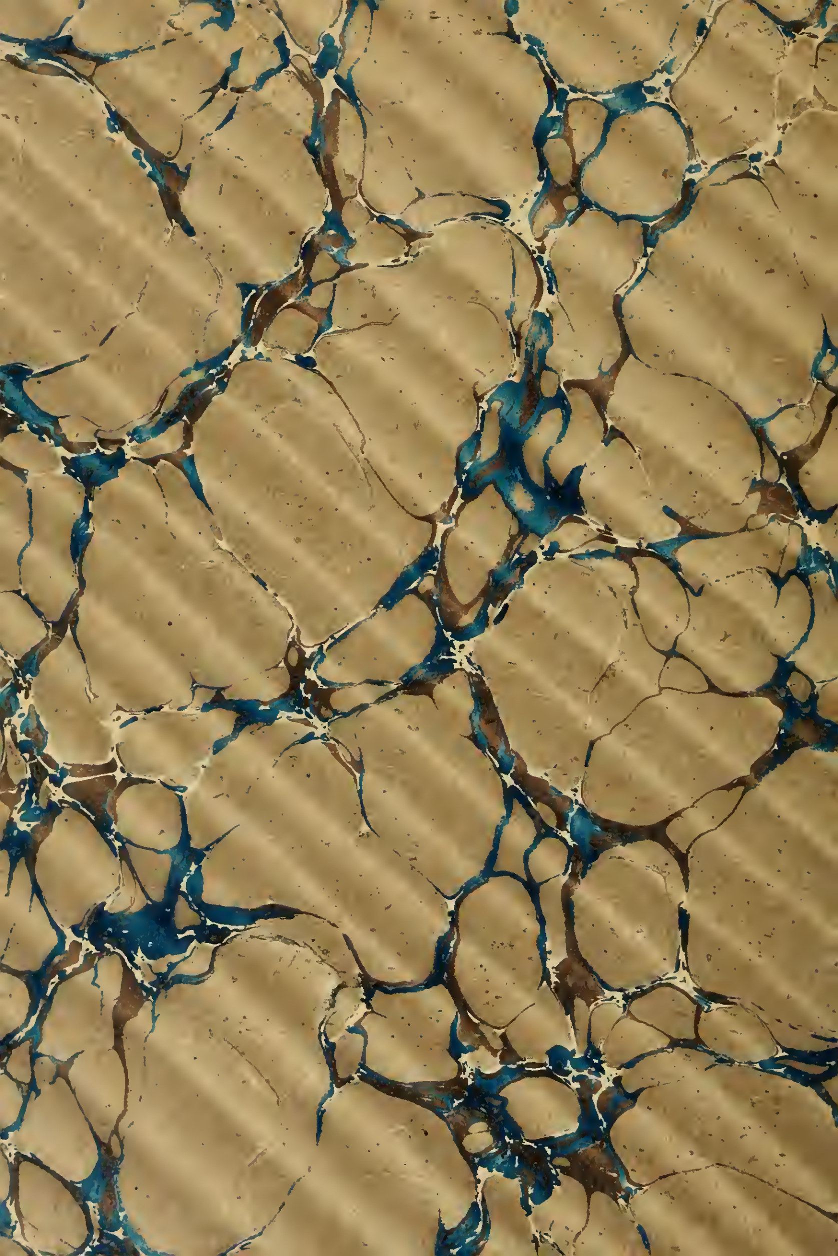
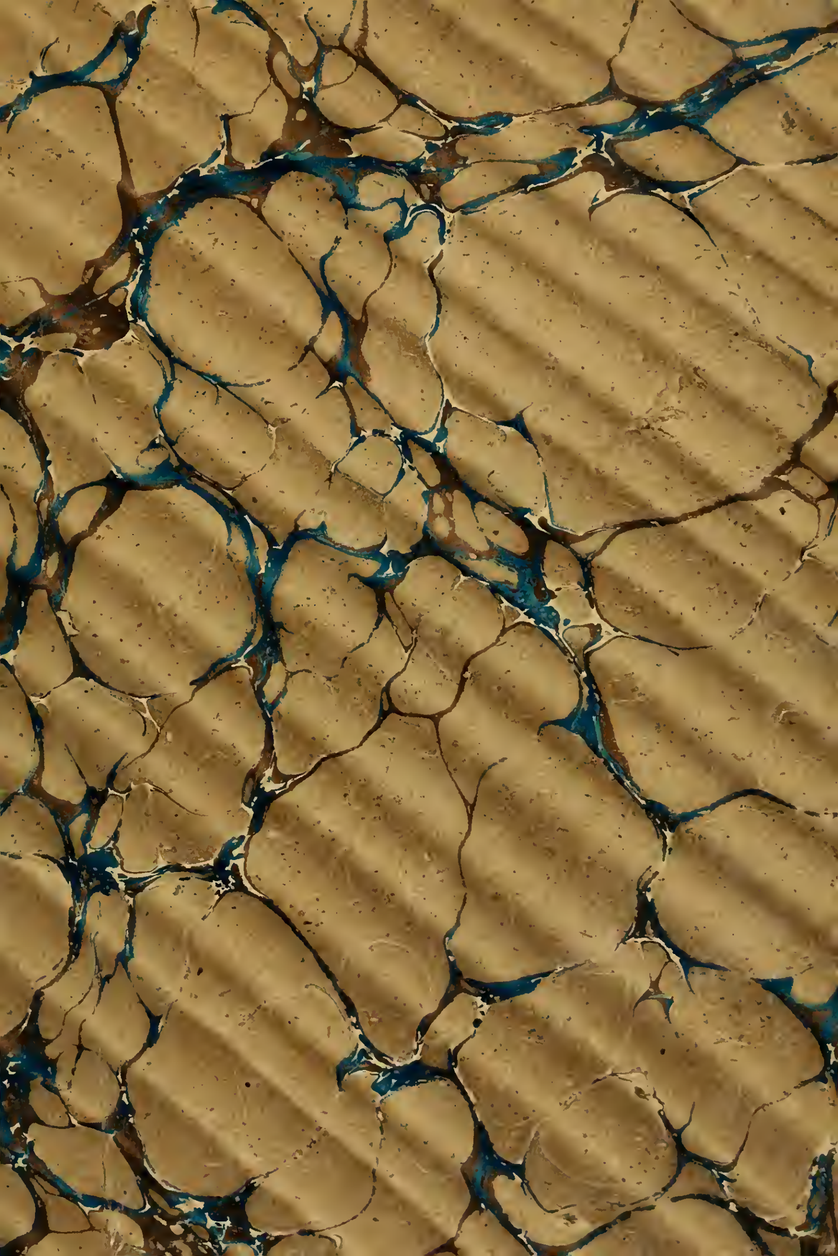

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01019417 3





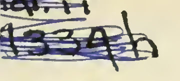
HISTOIRE

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET PHYSIQUES.


ECCE LABORA ET NOLI
CONTRISTARI



HISTOIRE

DES

SCIENCES

MATHÉMATIQUES

ET PHYSIQUES,

PAR

M. Maximilien MARIE,

RÉPÉTITEUR DE MÉCANIQUE

ET EXAMINATEUR D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TOME IV.

DE DESCARTES A HUYGHENS.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

—

1884

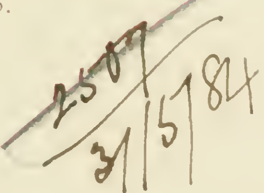
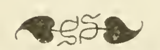




TABLE DES MATIÈRES.



HUITIÈME PÉRIODE.

De DESCARTES, né en 1596,
à CAVALIERI, né en 1598.

Noms des savants de cette Période.

	Né en	Mort en
DESCARTES	1596	1650
LA FAILLE	1597	1652
DE RHEITA	1597	1660
RICCIOLI	1598	1671
HARDY	1598	1678



HUITIÈME PÉRIODE.

Cette période voit s'effectuer dans la méthode deux révolutions capitales, toutes les deux dues à Descartes : l'union s'établit enfin entre l'abstrait et le concret, entre l'Algèbre et la Géométrie, mais, quoique la méthode de calcul de Descartes soit peut-être supérieure à celle qui a fini par prévaloir, elle est presque aussitôt remplacée par la méthode moderne. En même temps la Géométrie se reforme sur de nouvelles bases, dont s'emparera bientôt la Mécanique, par la réduction de toutes les questions semblables à une seule, au moyen de la théorie des coordonnées; et les solutions négatives des problèmes de Géométrie sont réalisées.

La théorie des équations reçoit aussi de nouveaux développements.

Descartes fait recevoir la loi de la réfraction, énoncée par Snellius, définit après Képler les fonctions des différentes parties de l'œil, et explique le phénomène de l'arc-en-ciel.



L'Algèbre de Descartes.

Commençons par la conception de Descartes pour transporter aux relations entre grandeurs concrètes, par une méthode plus rationnelle que celle de Viète, les théories d'Algèbre qui avaient jusqu'alors servi à l'étude des conditions de dépendance entre nombres. Cette conception est si simple qu'il suffira, pour la mettre en pleine lumière, de rapporter les quelques mots par lesquels Descartes la fait connaître. On remarquera la légèreté de main avec laquelle il opère une si grande révolution, mais on sentira aussi que la chose avait été trop finement dite pour être entendue du vulgaire.

« Tous les problèmes de Géométrie, dit-il, se peuvent réduire à tels termes qu'il n'est besoin, par après, que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire. Et, comme toute l'Arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont : l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division, ainsi n'a-t-on autre chose à faire en Géométrie, touchant les lignes qu'on cherche, pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres, ou en ôter, ou bien *en ayant une que je nommerai l'unité, pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la multiplication, ou bien en trouver une quatrième, qui soit à l'une de ces deux comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la division, ou, enfin, trouver une ou deux*

ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque autre ligne, ce qui est le même que tirer la racine carrée ou cubique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'Arithmétique en la Géométrie, afin de me rendre plus intelligible. » Et ailleurs : « *Il est à remarquer que par a^2 ou b^3 ou semblables, je ne conçois ordinairement que des lignes toutes simples, encore que, pour me servir des noms usités en Algèbre, je les nomme des quarrés ou des cubes.* »

Il entendait en effet par a^2 la troisième proportionnelle à la grandeur prise pour unité et à a ; par b^3 la longueur $\frac{b^2}{u}\frac{b}{u}$, etc.

Cette méthode de Descartes était la bonne et la plus convenable aux spéculations théoriques ; elle ne lui a pas survécu beaucoup plus longtemps qu'à Viète la sienne, mais, cette fois, le changement n'a pas été un progrès.



La Géométrie analytique.

Nous passons à la seconde révolution opérée par Descartes.

Les courbes qu'avaient étudiées les anciens s'étaient présentées à eux, non pas sans ordre réel, puisque leur invention était née de besoins éprouvés, mais au moins sans ordre appréciable; d'un autre côté, il n'existait aucun lien entre ces courbes, ni aucun moyen d'en établir, de sorte que l'étude de l'une ne pouvait en rien profiter à celle des autres ; enfin, leur identité même était loin d'être établie, car une même courbe, un peu compliquée, jouissant d'une infinité de propriétés toutes différentes, comporte par conséquent une infinité de définitions, dont la concordance peut

souvent être fort difficile à apercevoir. La *Géométrie* analytique est née du besoin de mettre de l'ordre et de la méthode dans des recherches poursuivies jusque-là sans plan arrêté et sans préparation suffisante. Les principes de cette nouvelle *Géométrie* sont tellement simples que quelques mots suffiront pour les résumer.

Toute définition d'une courbe comprend en elle-même l'indication des procédés à suivre pour construire cette courbe par points, c'est-à-dire pour en obtenir successivement autant de points que l'on voudra, et aussi rapprochés les uns des autres qu'il sera désirable. Le procédé consiste toujours à reproduire un nombre quelconque de fois une même figure définie, mais dépendant d'un élément variable à volonté. Pour chaque valeur de cet élément, la figure prend une forme déterminée, et les constructions échafaudées aboutissent chaque fois à un point particulier, qui est l'un des points de la courbe définie. Quand l'élément variable change, le point trouvé change aussi, et, si l'on imagine que cet élément croisse d'une manière continue, en même temps le point correspondant se déplacera d'une manière continue et décrira la courbe qu'on avait en vue.

Le principal inconvénient des définitions anciennes des courbes tenait à ce que la figure mobile que nous venons de considérer changeant de forme lorsque la courbe changeait, la mise en rapport de deux courbes, définies séparément, devenait presque impossible; la constatation même de l'identité d'une courbe définie successivement de plusieurs manières différentes pouvait souvent présenter des obstacles insurmontables; enfin, la théorie d'une courbe devant naturellement résulter de l'étude de la loi de déformation de la figure mobile propre à l'engendrer, une même courbe comportait autant de théories distinctes qu'on pouvait lui conce-

voir de modes de génération. L'étude préalable, souvent laborieuse, de la figure mobile était chaque fois à recommencer.

La première question à résoudre était donc de ramener à quelques types fixes, entre lesquels on pourrait ensuite choisir, selon les cas, les figures mobiles qui devraient servir à construire par points toutes les courbes.

Or la position d'un point sur un plan dépend de deux éléments, et donner un de ces éléments, c'est donner une ligne sur laquelle doit se trouver le point. Donner les deux éléments propres à déterminer un point, c'est donc donner deux lignes qui iront s'y couper, c'est-à-dire la figure à construire pour obtenir le point. Si, d'ailleurs, la nature des éléments choisis reste toujours la même, la figure mobile conservera la même forme et les définitions de toutes les courbes deviendront comparables entre elles.

Mais ce n'est encore qu'un des côtés de la question : la figure mobile, propre à engendrer une courbe, restant toujours la même· la loi de déformation de cette figure, c'est-à-dire la définition même de la courbe, ne peut plus être qu'une relation entre les deux éléments, toujours les mêmes, qui déterminent chaque point. Les courbes seront donc définies par des équations, et l'étude de ces courbes ne sera autre chose que l'étude de leurs équations.

Les deux éléments choisis pour fixer la position d'un point sont les coordonnées de ce point. Il existe une infinité de systèmes de coordonnées; mais, dans chaque système, les définitions de toutes les courbes sont comparables; l'étude de ces courbes comprend les mêmes recherches et peut être préparée d'avance par l'établissement préalable de formules générales, fournissant les solutions, toutes calculées, des principaux problèmes simples

qui, par leurs combinaisons diverses, forment toutes les questions spéciales qu'on peut avoir à envisager.

Cela posé, il est facile de se représenter ce que deviendra la méthode : en premier lieu, une courbe se présentant sous une définition quelconque, si on la rapporte au système de coordonnées adopté, et que, dans cette première opération, on laisse complètement indéterminé ce qu'il peut y avoir de variable dans les bases de ce système, on aura l'équation la plus générale de la courbe dans ce système, c'est-à-dire son équation type, de sorte que, si plus tard la même courbe se représente sous une autre définition, en recherchant son équation dans le même système de coordonnées, particularisé alors de façon à simplifier autant que possible les calculs, il suffira de comparer l'équation particulière à l'équation générale pour constater l'identité de la courbe, pour lui donner immédiatement son nom et en connaître toutes les propriétés étudiées à l'avance.

Ainsi, en premier lieu, l'identité d'une même courbe sera toujours facile à reconnaître, quelle qu'en soit la définition.

D'un autre côté, la mise en rapport de deux courbes quelconques, rapportées au même système de coordonnées, s'obtiendra de la manière la plus simple; en effet, le rapport élémentaire dont se composent tous les autres est le rapport constitué par le concours en un même point, c'est-à-dire le rapport d'intersection; or la représentation simultanée de deux courbes dans un même système de coordonnées fournit immédiatement les moyens de trouver leurs points de rencontre. En effet, les coordonnées du point de rencontre des deux courbes, devant satisfaire à la fois à leurs deux équations, seront données par la résolution algébrique du système de ces deux équations. Ainsi, la question

la plus générale que comporte l'étude des courbes sera rattachée à la difficulté analytique la plus élémentaire. L'étude spéciale des solutions fournies, selon les cas, par le système des équations des deux courbes, mettra d'ailleurs en évidence les rapports plus intimes que ces deux courbes pourront avoir : ainsi, si deux solutions se confondent, les courbes seront tangentes; si trois solutions se confondent, elles auront même cercle osculateur, etc; si deux solutions sont rejetées à l'infini, les deux courbes seront tangentes à l'infini, c'est-à-dire asymptotes, etc.

Cela posé, voici quelle sera la marche à suivre dans l'institution de la nouvelle *Géométrie.* On commencera par établir les formules de transformation nécessaires pour changer les bases du système de coordonnées, tout en restant dans le même système : ces formules permettront plus tard de reconnaître les différentes formes que pourra affecter l'équation d'une même courbe, par conséquent de choisir chaque fois celle de ces formes qui conviendra le mieux à la recherche qu'on aura en vue, mais surtout d'arriver à la forme la plus simple de l'équation de chaque courbe.

En second lieu, comme la droite et le cercle sont destinés à être mis à chaque instant en rapports avec les lignes plus compliquées, pour en faire ressortir les propriétés, on refera, dans le système de coordonnées adopté, les théories complètes de ces deux lignes, c'est-à-dire qu'on établira d'avance les formules des solutions de tous les problèmes élémentaires qui s'y rapportent. Ces formules seront d'un usage continuel, puisque les mêmes problèmes élémentaires, dont les bases seront alors prises sur la courbe étudiée. composeront nécessairement, par leurs combinaisons, toutes les questions qu'on pourra avoir à résoudre dans l'étude des rapports de cette courbe avec la droite et le cercle.

Ces préliminaires posés, on passera à l'étude spéciale des courbes représentées par les équations les plus simples. Ces courbes, si le système de coordonnées a été bien choisi, seront elles-mêmes les plus simples, par conséquent les plus usuelles, c'est-à-dire les plus utiles à connaître.

Les mêmes principes s'étendent d'eux-mêmes sans difficulté à la *Géométrie* à trois dimensions, c'est-à-dire à la *Géométrie* des surfaces : il faut trois éléments pour déterminer la position d'un point dans l'espace; les coordonnées d'un point seront donc au nombre de trois; une surface sera représentée par une équation entre les trois coordonnées d'un de ses points; enfin, une ligne sera représentée par le système de deux équations entre les trois coordonnées.

Telle est, en quelques mots, l'heureuse inspiration de Descartes pour la rénovation de la Géométrie tout entière.

L'invention de la Géométrie analytique n'a pas manqué, comme toutes les autres inventions, de donner lieu, de la part des historiens, à des recherches de paternité aussi inutiles que déraisonnables.

Beaucoup de géomètres, depuis Apollonius, à qui on aurait pu, encore mieux qu'à d'autres, attribuer l'invention de Descartes, ont rapporté des courbes à un de leurs diamètres et à la tangente menée à l'une des extrémités de ce diamètre; ils ont, comme Apollonius, recherché et établi les équations de ces courbes, c'est-à-dire, pour chacune d'elles, la loi de dépendance qui existait entre l'abcisse et l'ordonnée, dans le système d'axes choisi.

Cavalieri, Fermat, Roberval et beaucoup d'autres l'ont fait avant la publication de la Géométrie de Descartes, ou à peu près

au moment où elle paraissait. Cela devait être, puisque l'ouvrage d'Apollonius était alors dans toutes les mains.

Mais la Géométrie analytique ne consiste pas à rapporter une courbe à un système d'axes choisi exprès pour elle, puis une autre courbe à un autre système d'axes. Au contraire elle consiste à rapporter au même système d'axes toutes les courbes simultanément envisagées dans une même recherche, de façon à remplacer l'étude de leurs contingences par celle des solutions communes à leurs équations. Elle consiste à mettre en jeu, à côté de l'équation de la courbe à étudier, celles de lignes plus simples, rapportées au même système d'axes : des droites, des cercles, des coniques, etc., qui, par l'étude des relations qu'elles pourront avoir avec la courbe proposée, en feront discerner les propriétés.

Personne avant Descartes n'avait songé à donner une équation à la ligne droite; mais, si quelque géomètre y avait pensé par désœuvrement, il aurait bonnement pris cette droite pour axe des x, et serait revenu sans résultat, parce que les *ordinatim applicatæ* de la droite étant alors évanouissantes, elle n'eût pas eu d'équation.

J'ai bien cru pouvoir signaler dans Archimède quelques vestiges d'éléments de Géométrie analytique, mais c'est parce que ce grand homme, ayant à mettre en relation une parabole et une droite, exprime, comme nous le ferions aujourd'hui, la tangente de l'angle que la droite fait avec l'axe de la parabole, au moyen du rapport de la différence des ordonnées de deux de ses points à la différence de leurs abscisses.



Interprétation des solutions négatives des problèmes.

Les solutions algébriques d'un problème impossible ne sont que fictives par rapport à l'énoncé même de ce problème, et l'on a dû d'abord les rejeter d'une façon absolue. Cependant on s'est bientôt aperçu que, débarrassées du signe d'impossibilité, ces solutions pouvaient non seulement représenter autre chose que des non-sens, mais former même des réponses parfaitement précises et intelligibles à des questions toujours peu différentes de celles qui les avaient fournies.

En thèse générale, lorsqu'un phénomène présente plusieurs phases, si l'hypothèse a mal à propos borné les prévisions aux limites de l'une d'elles, il arrive que la réponse fournie par l'Algèbre indique, par les termes dans lesquels elle est conçue, que c'était à l'une des phases voisines que la question, bien comprise, eût dû se rapporter, et il n'est généralement pas difficile de procéder à la rectification nécessaire.

D'ailleurs, dès que le fait qui vient d'être énoncé a pu être nettement compris, il n'a pas été difficile de s'élever directement à une conception plus haute, qui a pris aujourd'hui une importance capitale dans les Sciences mathématiques. Le signe d'impossibilité, qui pouvait affecter les valeurs des inconnues d'un problème, indiquant le passage d'une phase à l'autre du phénomène étudié, on a pu concentrer dans les mêmes formules la représentation simultanée des lois relatives aux différentes phases, en admettant à l'avance la variété dans la nature des réponses qui pourraient être fournies. A l'intérieur des limites de l'une des phases, prise pour type, les réponses seront claires par elles-

mêmes; en dehors de ces limites, elles le seront tout autant, par interprétations prévues.

C'est à l'aide de ces principes très simples que l'on a pu supprimer, durant cette Période, l'obligation où l'on était auparavant de prévoir toutes les inversions que pourraient présenter les parties d'une figure relative à une question de Trigonométrie, par exemple; et que Descartes, en particulier, a pu concevoir représentées par une même équation les branches d'une même courbe, comprises dans les quatre angles formés par les axes de coordonnées.

Les solutions singulières que peut fournir l'Algèbre sont de deux sortes, négatives ou imaginaires. L'interprétation des solutions imaginaires est d'origine toute récente, et nous n'aurons à nous en occuper que beaucoup plus tard. Commençons par les solutions négatives : l'interprétation de ces solutions est fondée sur cette remarque que le système des valeurs trouvées pour les inconnues, prises positivement, satisferait aux équations du problème, pourvu qu'on y changeât les signes des termes de degrés impairs par rapport aux inconnues trouvées négatives. A cette modification des équations correspond généralement, pour l'énoncé, une modification facile à saisir.

Or, l'établissement de cette règle se réduit à peu de chose : les équations, quelles qu'elles soient, possibles ou impossibles, étant toujours traitées de la même manière, on peut concevoir les solutions arithmétiques obtenues comme représentant, dans tous les cas, les valeurs actuelles de formules littérales, que l'on eût obtenues en laissant la question posée dans toute sa généralité. Ces formules littérales, lorsqu'on les aurait trouvées, satisferaient aux équations résolues, pourvu que les substitutions fussent faites

comme elles devraient l'être si toutes les opérations indiquées étaient d'elles-mêmes possibles. Mais la substitution algébrique correspond à un mode précis de substitution arithmétique. Ainsi, si la valeur arithmétique d'un polynôme est affectée du signe *moins*, ce signe disparaît dans les puissances paires et ne se conserve que dans les puissances impaires; plus généralement, le produit d'un nombre impair de polynômes, dont les valeurs se trouvent affectées du signe *moins*, est lui-même négatif, tandis que le produit d'un nombre pair de pareils polynômes a le signe *plus;* les valeurs absolues des inconnues, trouvées négatives, doivent donc satisfaire aux équations modifiées suivant la règle énoncée.

C'est par application de cette règle d'Algèbre, au moins entrevue, que l'on a pu apercevoir la possibilité de donner aux formules de Trigonométrie une entière généralité, en attribuant des signes convenables aux lignes trigonométriques des angles, considérés dans les différents quadrants. C'est ainsi, notamment, qu'on a pu donner un sens clair et précis aux solutions négatives des équations qui résolvent tous les problèmes relatifs à la division des arcs.

Il est moins certain que Descartes, en fondant les bases de la Géométrie analytique, ait envisagé les difficultés de la question qui aurait dû le préoccuper avant tout, de savoir si les arcs de courbes, contenus dans les trois derniers angles des axes de coordonnées, et dont les points étaient fournis par les solutions négatives par rapport à x, ou à y, ou à x et y, de l'équation dont les solutions positives avaient fourni l'arc construit dans le premier angle, se feraient suite les uns aux autres et au premier arc.

Il est probable qu'à cet égard il s'est contenté de la vérification constante fournie par toutes les expériences.



BIOGRAPHIE

DES

SAVANTS DE LA HUITIÈME PÉRIODE

ET

ANALYSE DE LEURS TRAVAUX.

DESCARTES.

(Né à Lahaye (Touraine) en 1596, mort en Suède en 1650.)

René Descartes, seigneur du Perron, malgré la fermeté avec laquelle il a toujours refusé toutes sortes de titres, était d'une famille noble, qui avait vu plusieurs de ses membres s'élever à des postes éminents dans la magistrature, dans l'église et dans l'armée. Son père était conseiller au Parlement de Bretagne; sa mère, Jeanne Brochard, était fille du lieutenant général pour la province du Poitou. Il naquit le 31 mars 1596. Sa mère perdit la vie peu de jours après la lui avoir donnée; elle était très faible, et Descartes hérita d'elle une santé fort débile, qui ne se rétablit que très tard.

Il entra en 1604 au collège de La Flèche, que dirigeaient les Jésuites. « Non content de ce qui s'enseignait dans le collège, il y parcourut avidement tous les livres qui traitent des Sciences les plus curieuses et les plus rares, persuadé que la lecture des bons livres est comme une conversation avec les plus honnêtes gens

des siècles passés, qui en ont été les auteurs, mais une conversation étudiée, dans laquelle ils ne découvrent que les meilleures de leurs pensées. » (*Discours de la Méthode*). Parmi ses amis de collège, se trouvait celui qui fut depuis le Père Mersenne, avec qui il conserva toujours des relations intimes.

Dès ses dernières années de collège, Descartes eut conscience de la vanité ou de l'absurdité de la plupart des choses qui formaient les cours d'études d'alors; son esprit inquiet ne se reposa que dans l'étude des Mathématiques, à laquelle il se livra avec ardeur. « Ce qui le charmait particulièrement dans les Mathématiques, et surtout dans l'Arithmétique et la Géométrie, était la certitude et l'évidence de leurs raisons; mais il n'en comprenait pas encore le vrai usage. » (*Discours de la Méthode*).

Descartes quitta le collège en 1612 pour retourner près de son père. Quelque temps après, il vint à Paris, où il renoua amitié avec Mersenne, et se remit à l'étude de la Géométrie et de l'analyse des anciens. En 1617, à l'âge de vingt et un ans, sollicité par sa famille de prendre un parti, il choisit la carrière des armes, non pas qu'il songeât le moins du monde à devenir un grand capitaine. Il se charge lui-même, dans une de ses lettres, de prévenir toute erreur à cet égard : « Bien que la coutume, dit-il, et, l'exemple fassent estimer le métier de la guerre comme le plus noble de tous, pour moy, qui le considère en philosophe, je ne l'estime qu'autant qu'il vaut, et même j'ai bien de la peine à lui donner place entre les professions honorables, voyant que l'oisiveté et le libertinage sont les deux principaux motifs qui y portent aujourd'hui la plupart des hommes. »

Descartes, en entrant dans la carrière militaire, voulait seulement se mettre en position de pouvoir voyager, ce qui n'était

facile alors qu'à des hommes en armes et rassemblés. Il servit d'abord sous les ordres du prince Maurice de Nassau. Ce prince aimait les Mathématiques et les mathématiciens, et c'est là sans doute ce qui attira Descartes vers lui. Les deux années de pleine paix qu'il passa cette fois en Hollande y furent surtout employées par lui dans le commerce des savants qu'il rencontrait à la cour du prince.

Un jour qu'il était en garnison à Bréda, une affiche écrite en flamand, autour de laquelle la foule était groupée, attira ses regards. C'était l'énoncé d'un problème de Géométrie qu'on proposait à résoudre. Descartes, qui ne comprenait pas le flamand, se fit expliquer de quoi il s'agissait. Celui à qui il s'adressa, et qui n'était autre que le mathématicien Beekmann, principal du collège de Dort, trouva la question fort étrange de la part d'un militaire; il y répondit avec un ton pédantesque et des airs de supériorité. Le lendemain, Descartes lui apportait la solution du problème.

Descartes quitta le service de la maison d'Orange après l'odieuse exécution de Barneveldt et se mit à voyager en Allemagne (1619). Il servit dans les troupes du duc de Bavière, mais toujours en philosophe, les quitta à Ulm pour s'y lier d'amitié avec Jean Faulhaber, professeur de Mathématiques, qu'il étonna par son savoir, et les rejoignit peu de temps après (1620) pour les quitter de nouveau et passer (1621) en Hongrie sous les ordres du comte de Bucquoy. A la mort de ce dernier, arrivée peu de temps après, il quitta entièrement le service des armes.

Nous le voyons alors, tourmenté par une sorte de fièvre de locomotion, parcourir en curieux une partie de l'Allemagne du Nord, revenir en Hollande, traverser la France, la Suisse, le

Tyrol, l'Italie, puis revenir en France, cherchant partout les hommes avec qui il pût entrer en communication d'idées et dont il pût apprendre quelque chose.

Toutefois, il est à remarquer qu'il ne chercha pas à voir Galilée, quoi qu'il en eût eu l'occasion en passant à Florence en 1625. Il est probable que son attachement à la foi catholique, sa dévotion au Saint-Siège et la circonspection qu'il a toujours montrée dans toutes les circonstances où la religion pouvait avoir part, l'engagèrent à éviter de se lier avec l'ami de Fra Paolo Sarpi et des principaux chefs de la République de Venise, dont les démêlés avec le Pape avaient eu trop de retentissement en Europe pour ne pas suggérer à notre philosophe l'idée d'une grande réserve.

De retour à Paris, il renoua avec Mersenne et Mydorge ses anciennes relations et se lia avec d'autres savants : Hardi, conseiller au Châtelet; de Beaune; Morin, docteur en Médecine et professeur de Mathématiques au Collège de France; de Ville-Bressieux, chimiste et mécanicien; Desargues, et Balzac. Mais il les quitta brusquement pour assister au siège de La Rochelle, auquel il prit même part comme volontaire amateur.

Après la reddition de la ville, il revint à Paris et prit aussitôt les dispositions nécessaires pour aller s'établir en Hollande. Il arriva à Amsterdam en 1629 et y demeura quelque temps; il séjourna ensuite successivement dans un grand nombre de villes des États. Enfin il se fixa à peu près dans une petite ville, Egmond-de-Binnen.

Pendant son séjour à Amsterdam, il s'était lié, avec le père d'Huyghens, d'une amitié qui ne se démentit plus. Il se fit encore d'autres amis, entre autres Renerius (Reneri), de Waessenaer, Hooghelande, qui l'aidèrent dans ses recherches et ses expé-

riences. Mais il s'attira la haine d'un ministre luthérien, Voëtius, recteur de l'Université d'Utrecht, qui mit tout en usage pour lui susciter des adversaires et manqua réussir à lui causer de sérieux embarras en le représentant comme un ennemi de la religion et de l'Etat. Voëtius avait poussé la rage jusqu'à traiter Descartes de vagabond, de Caïn, d'athée digne du bûcher de Vanini, mais il fut solennellement condamné par une sentence de l'Université de Groningue.

Vers ce temps-là, Descartes perdit une fille qu'il chérissait extrêmement et la société de la princesse palatine Élisabeth, qui avait reçu ses leçons et lui avait voué une affection enthousiaste.

Ces chagrins ramenèrent Descartes à Paris, où il eut le bonheur de faire la connaissance de Clerselier, qui resta depuis lors un de ses meilleurs amis.

Clerselier était beau-frère de l'ambassadeur de France en Suède, Chanut. C'est cette circonstance qui amena Descartes à écouter les propositions que lui faisait la reine Christine de Suède, de venir s'établir à sa cour. Il arriva à Stockholm au mois d'octobre 1649 et fut reçu à l'ambassade de France. Au mois de janvier, Chanut fut pris d'une fluxion de poitrine et son nouvel ami, qui ne le quittait que lorsque la reine le faisait appeler, eut le bonheur de le voir entrer en convalescence, mais lui-même fut atteint du même mal, auquel il succomba le 11 février 1650.

Son corps fut ramené à Paris par les soins de notre ambassadeur ; il est déposé dans un caveau de l'église Sainte-Geneviève.

Les manuscrits qu'il avait laissés furent adressés à Clerselier, qui les collationna et en publia ce qui pouvait être imprimé.

Nous allons énumérer d'abord ses principaux ouvrages.

Le premier qu'il publia ne parut qu'en 1637.

Descartes avait conçu depuis longtemps et exécuté déjà pour la plus grande partie un ouvrage considérable, *les Mondes*, qui devait renfermer toutes ses recherches sur la Géométrie, la Physique et la Philosophie. Mais il redoutait de se mettre en opposition avec l'enseignement de l'Église; et l'avis de la condamnation de Galilée le retint. « Je sais bien, dit-il dans une lettre à Mersenne, que les sentences prononcées par le tribunal de l'Inquisition ne font pas foi en matière de dogme et qu'il faut premièrement que le concile y ait passé. Mais je ne suis point si amoureux de mes pensées que de vouloir me servir de telles exceptions pour avoir le moyen de les maintenir. » Les bûchers se rallumaient alors un peu partout; mais on ne peut pas supposer que la crainte seule des persécutions ait déterminé Descartes à la suppression de son ouvrage de prédilection, puisqu'il est resté toujours et partout, même en Suède, fidèle à la foi catholique, de son plein gré et sans arrière-pensée. Il fit faire toutefois quelques démarches près la cour de Rome, pour se mettre en sûreté dans le cas où il publierait son *Monde*, mais il y renonça bientôt; la partie de cet ouvrage qui a trait à la Cosmogonie ne fut publiée que plus tard, sous le titre : *Des Principes*.

En 1636, sollicité de tous ses amis, qui ne pouvaient se consoler de la suppression du *Monde*, il en fit parvenir au Père Mersenne, à Paris, pour obtenir le privilège du roi, quatre traités séparés : le *Discours de la Méthode*, la *Dioptrique*, les *Météores* et la *Géométrie*.

Sa réputation était déjà si grande que le privilège lui fut accordé « pour faire imprimer non seulement les quatre traités dont il était question, mais encore tout ce qu'il avait écrit

jusque-là et tout ce qu'il pourrait écrire dans la suite de sa vie, en telle part que bon lui semblerait, dedans et dehors le royaume de France, et le public lui aurait l'obligation des inventions qu'il aurait à publier. » (1637).

La *Dioptrique* essuya quelques objections de la part de Fermat, à qui Mersenne avait envoyé l'ouvrage avec prière d'en donner son opinion. Fermat, pour se donner un titre près de Descartes, écrivit les deux excellents petits traités *De maximis et minimis* et *De inventione tangentium linearum curvarum*, et les adressa à Descartes, qui eut le tort d'en juger trop précipitamment d'une manière défavorable; il en résulta une discussion assez vive qui fut changée bientôt en querelle par l'aigreur que Roberval, ami de Fermat, apporta dans la dispute. Le débat fut solennellement porté au tribunal de quatre arbitres : Roberval et Pascal le père, pour Fermat; Desargues et Mydorge, pour Descartes. Mais Fermat qui n'aimait pas la guerre y mit bientôt fin en faisant les premières avances.

Ce fut à cette époque que le père Mersenne inventa la roulette ou cycloïde. Descartes en trouva la tangente par cette règle si simple qui a constitué depuis l'une des bases de la théorie du centre instantané de rotation.

A partir de cette époque, Descartes ne s'est plus occupé du Géométrie : il fit paraître successivement ses *Méditations métaphysiques*, en 1641 ; ses *Principes de philosophie*, dédiés à la princesse Élisabeth, en 1644; son *Traité des passions de l'âme*, en 1649. Il laissa inachevés, incomplets ou informes, ses traités *De l'homme et de la formation du fœtus*; *Des règles pour conduire l'esprit à la recherche de la vérité*; un autre intitulé : *Studium bonæ mentis*; son *Dialogue sur la recherche de la*

vérité par la seule lumière naturelle, et d'autres petits écrits qui furent publiés par Clerselier, en 1668.

Il nous reste à analyser les principaux de ses ouvrages.

Les Mondes.

Le premier ouvrage de Descartes, *les Mondes*, ne nous est pas parvenu tel qu'il avait été conçu d'abord; Descartes en a détaché les meilleures parties, qui ont paru sous des titres divers; ce qu'il en est resté, dans le *Livre des principes*, ne contient guère que ces théories cosmiques, sans aucun fondement, qui, après avoir excité pendant quelque temps une admiration immodérée, ont ensuite servi de prétexte aux critiques les plus amères.

Le XVIIIe siècle a été injuste envers Descartes. L'homme est ainsi fait qu'il ne peut supporter le doute en quelque matière que ce soit : les découvertes de Copernic, de Tycho-Brahé et de Képler ayant renversé toutes les idées cosmogoniques anciennes, les *tourbillons* devaient nécessairement éclore dans quelque tête. Descartes a fait tort à sa gloire en se chargeant prématurément de résoudre toutes les questions qui surgissaient des découvertes qu'on venait de faire, mais qui pourrait dire que le bruit immense qui se fit autour des questions qu'il avait soulevées ne servit pas à fixer la destinée de Newton? Les erreurs de Descartes ont en tout cas fait couler plus d'encre que de sang : c'est au moins une atténuation à sa faute.

Les recherches que fit Descartes en Anatomie n'ont plus aujourd'hui aucune valeur, mais elles prouvent au moins qu'il entendait son métier de philosophe.

Nous circonscrirons donc notre étude aux trois traités qui

faisaient suite au discours de la *Méthode*, dans l'édition originale de 1638, savoir : la *Dioptrique*, les *Météores* et la *Géométrie*, et à un petit traité de Mécanique que Clerselier y a joint. Ce sont les seuls ouvrages scientifiques de Descartes qui puissent aujourd'hui fixer l'attention.

La Dioptrique.

Quoiqu'on n'ait jamais rien pu tirer de pratique de la *Dioptrique*, elle restera toujours un vrai et légitime titre de gloire pour Descartes. Le but propre de cet ouvrage est la recherche de la figure des verres de lunettes. Descartes rappelle d'abord la loi de la réflexion, qu'il essaye de démontrer *a priori* par l'exemple d'une balle lancée obliquement contre une surface polie. Il suppose, dans cette démonstration, que la vitesse totale du mobile doive rester la même après qu'avant le choc, et, admettant que la composante parallèle à la surface réfléchissante ne doive pas être altérée, il en conclut que la composante normale ne le sera pas non plus.

Il donne de la loi de la réfraction, qui venait d'être découverte par Snellius, une démonstration analogue, en supposant qu'au moment du passage de la lumière d'un milieu dans un autre, la composante de sa vitesse, prise parallèlement à la surface réfringente, reste constante, et que la vitesse totale est modifiée dans un rapport dépendant de la nature des deux milieux.

Cette hypothèse conduit bien immédiatement à la loi des *sinus*; mais peut-être pourrait-on, à plus juste titre, dire que la loi des sinus a déterminé le choix de l'hypothèse. Car le raisonnement de Descartes conduirait plutôt à admettre que la composante normale de la vitesse doive être réduite dans un certain rapport, la

composante tangentielle restant la même ; seulement, alors, ce ne seraient plus les sinus des angles d'incidence et de réfraction qui conserveraient un rapport constant, mais leurs tangentes, et ce n'était pas ce qu'il fallait démontrer.

Enfin Descartes explique la conformation de l'œil, la manière dont les rayons lumineux s'y comportent, les sensations qu'ils produisent et comment nous voyons.

Ces préliminaires posés, Descartes, arrivant à la question principale, démontre que si l'on avait construit, en verre ou en toute autre matière transparente, un ellipsoïde de révolution autour de l'axe focal, un faisceau de rayons parallèles à l'axe pénétrant dans cette matière par tous les points d'une des moitiés de la surface irait converger au foyer opposé, pourvu seulement que le rapport du grand axe à la distance des foyers, dans l'ellipse génératrice, fût égal au rapport constant des sinus des angles qu'un rayon lumineux, brisé à son passage de l'air dans la matière transparente employée, fait avec la normale au point d'incidence.

Il résulte de là que, si l'on avait une lentille concave-convexe, dont la surface convexe fût une calotte de cet ellipsoïde, et la surface concave une calotte sphérique, ayant pour centre le foyer où les rayons doivent aller concourir, comme cette sphère serait rencontrée normalement par tous les rayons, d'abord parallèles à l'axe, qui auraient pénétré dans la lentille, ils poursuivraient leur chemin en ligne droite jusqu'au foyer. Réciproquement, des rayons partant de ce foyer traverseraient normalement la surface sphérique, et, en se réfractant sur la surface ellipsoïdale, ils émergeraient parallèlement à l'axe. Au contraire, si la surface convexe était une calotte sphérique et la surface concave une calotte ellip-

soïdale, les rayons parallèles à l'axe qui tomberaient sur la surface concave se réfracteraient en divergeant du foyer, et réciproquement les rayons convergeant vers le foyer qui pénétreraient par la surface sphérique se réfracteraient parallèlement à l'axe.

Avec deux lentilles convenablement disposées, on pourrait donc aisément rapprocher de l'œil ou en éloigner à volonté le sommet d'un faisceau de rayons divergents, puisqu'il suffirait de rendre les rayons parallèles, au moyen de la première lentille, et convergents, en avant de l'œil, au moyen de la seconde, ou divergents d'un point plus éloigné. Or, c'est tout ce qu'on se propose d'obtenir des instruments d'optique.

Les lentilles hyperboliques jouissent de propriétés entièrement analogues à celles des lentilles elliptiques ; elles présenteraient même un avantage, parce que la marche des rayons provenant de points non situés sur l'axe se soustrait à la théorie et que, suivant Descartes, l'inconvénient serait moins grand avec des lentilles hyperboliques.

La *Dioptrique* produisit, lorsqu'elle parut, une impression profonde en Europe. Tout le monde voulut faire des lunettes cartésiennes, mais les difficultés étaient presque insurmontables. Le poli du verre ne peut en effet s'obtenir que par frottement et les surface splanes ou sphériques sont les seules que les ouvriers puissent obtenir avec sûreté.

Au reste, on a depuis longtemps abandonné toutes tentatives pour réaliser le rêve de Descartes : les travaux de Newton en ont démontré l'inanité. On pouvait en effet attendre de bons effets de la découverte de Descartes, tant qu'on ignora la composition de la lumière blanche et l'inégale réfrangibilité des couleurs primitives ; mais il est évident maintenant que le rapport du grand

axe de l'ellipse ou de l'hyperbole génératrice de la lentille à la distance de ses foyers devant dépendre du pouvoir réfringent de la matière transparente employée, on ne pourrait, en tout cas, réunir au foyer que les rayons d'une même couleur.

Les Météores.

Nous dirons peu de chose des *Météores,* qui ressemblent encore un peu trop à un extrait du *Monde.* Ils contiennent cependant la première explication exacte qu'on ait eue de l'arc-en-ciel.

On savait, depuis Aristote, que l'arc-en-ciel est produit par les rayons du soleil renvoyés dans un certain ordre par les gouttes de pluie; mais, jusqu'à la fin du XVIe siècle, on s'était toujours obstiné à chercher dans la réflexion seule la variété des couleurs qu'il présente. Un physicien de Breslau, Fleischer, dans un ouvrage publié en 1571, avait cherché à expliquer l'arc-en-ciel par une double réfraction et une réflexion, mais il imaginait que la lumière, traversant une goutte de part en part, allait ensuite se réfléchir sur une autre goutte placée derrière la première, pour revenir à l'œil de l'observateur. Ce fut Antonio de Dominis qui, le premier, eut l'idée de faire réfléchir la lumière dans l'intérieur de la goutte avant de l'en faire ressortir; il ne pouvait, d'ailleurs, rendre raison de l'angle sous lequel l'observateur voit le rayon de l'arc, et se trompa complètement dans l'explication de l'arc secondaire qu'il ne soupçonna pas dû à une double réflexion de la lumière dans l'intérieur des gouttes.

Il ne suffit pas qu'un rayon de lumière parvienne à nos yeux pour y exciter une sensation, il faut qu'un faisceau entier de rayons sensiblement parallèles pénètre dans la pupille; or, de tous

les faisceaux de rayons solaires qui tombent parallèlement sur la goutte d'eau, il n'y en a qu'un seul, savoir celui qui est éloigné du rayon central entre les 85 et 86 centièmes du rayon du globule, qui, après la réfraction et la réflexion, soit encore composé de rayons parallèles. Il n'y a donc que ce faisceau de lumière qui puisse exciter la sensation sur un œil éloigné; or, il émerge de la goutte en faisant un angle d'à peu près 41° 30′ avec la direction de la ligne qui va du Soleil à la goutte ou à l'œil de l'observateur, ce qui est la même chose, et, par conséquent, l'observateur doit voir le rayon de l'arc-en-ciel principal sous cet angle de 41° 30′.

C'est en effet ce que trouva Descartes. Mais nous ne voudrions pas donner à penser qu'il ait exprimé, comme il est bien facile aujourd'hui de le faire d'après Newton, la condition pour qu'un rayon incident, après ces deux réfractions et sa réflexion, pût affecter l'œil, ni, à plus forte raison, qu'il ait obtenu analytiquement la condition de parallélisme, au sortir de la goutte, entre des rayons provenant de deux rayons tombés sur cette goutte en des points infiniment voisins.

Voici comment Descartes opère : il divise en 10 000 parties égales l'un des rayons du grand cercle de la goutte, déterminé par le plan diamétral perpendiculaire à la droite menée vers le Soleil, et il suit de proche en proche, dans un premier calcul, les rayons lumineux qui, prolongés dans l'intérieur de la goutte, iraient passer par les points de ce rayon marqués

1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000;

il calcule les angles dont ces rayons ont été déviés, après leur

passage à travers la goutte, et il trouve

$$5^\circ 40', \ 11^\circ 19', \ 17^\circ 56', \ 22^\circ 30', \ 27^\circ 52', \ 32^\circ 56', \ 37^\circ 26', \ 40^\circ 44', \ 40^\circ 57',$$

sur quoi il dit : « Et il est aisé à voir en cette table qu'il y a bien plus de rayons qui font l'angle d'environ 40° qu'il n'y en a qui le fassent moindre. »

Et, comme ces rayons, déviés de 40° environ, sont ceux qui sont tombés aux points marqués 8000 et 9000, il recommence le calcul, en réduisant l'intervalle des essais, pour les rayons lumineux qui tomberaient aux points marqués

8100, 8200, 8300, 8400, 8500, 8600, 8700, 8800, 8900, 9000, 9100, 9200, 9300, 9400, 9500, 9600, 9700, 9800;

il trouve alors pour les angles de déviation :

$$40^\circ 58', \ 41^\circ 10', \ 41^\circ 20', \ 41^\circ 26', \ 41^\circ 30', \ 41^\circ 30', \ 41^\circ 28', \ 41^\circ 22', \ 41^\circ 12, \ 40^\circ 57', \ 40^\circ 36', \ 40^\circ 4', \ 39^\circ 26', \ 37^\circ 32', \ 38^\circ 38' \ 36^\circ 6', \ 34^\circ 12', \ 31^\circ 31'.$$

« Et je vois ici, dit-il, que le plus grand angle peut être de 41°30', à quoi ajoutant 17' pour le demi-diamètre du Soleil, j'ai 41°47' pour le plus grand diamètre de l'arc-en-ciel intérieur. »

Il opère de même pour l'arc-en-ciel extérieur et trouve pour son demi-diamètre 51° 37'.

Il est évident que Descartes a bien vu qu'il s'agissait au fond d'une question de maximum ou de minimum; il est clair aussi que la méthode qu'il emploie est celle dont il conviendrait d'user

dans la pratique, toutes les fois que le calcul ne pourrait pas être institué; mais ce n'était pas le cas ici.

Quant à la coloration de l'arc, Descartes dit simplement que la lumière réfractée par la goutte se comporte comme celle qui a traversé un prisme de verre.

Il est curieux de remarquer que Descartes ne paraît pas absolument fixé sur le sens de la marche de la lumière, des objets vers l'œil ou de l'œil vers les objets. Il dit, en effet, dans l'une des premières pages de sa *Dioptrique :* « Ainsi faut-il avouer que les objets de la vue peuvent être sentis, non seulement par le moyen de l'action, qui, étant en eux, tend vers les yeux; mais, aussi par le moyen de celle qui, étant dans les yeux, tend vers eux. Toutefois, pour ce que cette action n'est autre chose que la lumière, il faut remarquer qu'il n'y a que ceux qui peuvent voir pendant les ténèbres de la nuit comme les chats, dans les yeux desquels elle se trouve ; et, que, pour l'ordinaire des hommes, ils ne voient que par l'action qui vient des objets; car l'expérience nous montre que ces objets doivent être lumineux ou illuminés pour être vus; et non point nos yeux pour les voir. »

Descartes croyait à l'instantanéité de la transmission de la lumière, ce qui ne doit pas étonner, mais il la démontrait par l'exemple d'un bâton dont les deux bouts s'avancent en même temps lorsqu'on le pousse dans le sens de sa longueur.

Il trouvait fort singulier qu'on pût admettre qu'une balle restât un certain temps très court en contact avec la surface d'un corps, avant de rebondir. Voici, en effet, comment il s'exprime au commencement du second discours ou chapitre de sa *Dioptrique :* « Par conséquent, on ne doit pas imaginer qu'il soit nécessaire qu'elle s'arrête au point de rencontre avant que de se relever,

ainsi que font plusieurs de nos philosophes; car, si son mouvement était une fois interrompu par cet arrêt, il ne se trouverait aucune cause qui le fît par après recommencer. »

La Géométrie.

On voit que Descartes a remué bien des idées, sondé bien des questions; mais, de ce grand travail, il ne reste guère aujourd'hui d'intact que sa *Géométrie* dont nous allons donner une analyse plus succinte que nous ne voudrions.

La *Géométrie* de Descartes n'est pas, comme on pense bien, un Traité de Géométrie analytique; c'est un simple aperçu de ce que va pouvoir devenir cette branche de la Science, dès que l'idée de l'inventeur aura été comprise, c'est-à-dire une sorte d'introduction familière à un traité que l'auteur laisse à faire à ses successeurs immédiats, et dont il se borne à indiquer les premières bases. Des trois livres qui composent l'ouvrage, les deux premiers ont seuls trait à la Géométrie; le troisième, qui offre un résumé substantiel des connaissances déjà acquises en Algèbre avant Descartes, fait simplement l'office d'un cadre où puissent trouver place la démonstration de la fameuse règle des signes et la résolution de l'équation du quatrième degré. Le second livre est en partie absorbé par la théorie des fameuses ovales, dont nous aurons peu de choses à dire.

Au point de vue où nous devons nous placer, nous ne devons considérer dans la *Géométrie* de Descartes que trois points essentiels, où l'auteur expose sa manière de comprendre l'application de l'Algèbre à la solution des problèmes de Géométrie, le mode de représentation des courbes au moyen de leurs équations, enfin la solution générale du problème des tangentes.

Nous avons eu déjà bien souvent l'occasion de marquer la part qui revient à Descartes dans la grande révolution par laquelle toutes les questions concrètes ont été enfin ramenées à des questions abstraites d'Algèbre.

Nous n'y reviendrons donc pas : nous nous bornerons à rappeler que, moyennant l'intervention de l'unité abstraite, indéfinie, qui ne remplit jamais qu'un rôle de présence, toutes ses équations ont un sens immédiat, bien que les grandeurs y entrent directement, au lieu de leurs mesures comme dans notre Algèbre moderne.

Descartes nous apprend que c'est en s'essayant au problème cité par Pappus comme ayant arrêté Euclide et Apollonius, que lui vint l'idée de son système de Géométrie analytique.

Voici ce qu'il dit à ce sujet :

« La question qui avoit été commencée à résoudre par Euclide et poursuivie par Apollonius, sans avoir été achevée par personne, était telle : Ayant trois, ou quatre, ou plus grand nombre de lignes droites données par position, premièrement on demande un point duquel on puisse tirer autant d'autres lignes droites, une sur chacune des données, qui fassent avec elles des angles donnés, et que le rectangle contenu en deux de celles qui seront ainsi tirées d'un même point ait la proportion donnée avec le carré de la troisième, s'il n'y en a que trois; ou bien avec le rectangle des deux autres, s'il y en a quatre; ou bien, s'il y en a cinq, que le parallélépipède composé de trois ait la proportion donnée avec le parallélépipède composé des deux qui restent et d'une autre ligne donnée; ou, s'il y en a six, que le parallélépipède composé de trois ait la proportion donnée avec le parallélépipède des trois autres; ou, s'il y en a sept, que ce qui se produit

lorsqu'on en multiplie quatre l'une par l'autre ait la raison donnée avec ce qui se produit par la multiplication des trois autres et encore d'une autre ligne donnée; ou, s'il y en a huit, que le produit de la multiplication de quatre ait la proportion donnée avec le produit des quatre autres; et ainsi cette question se peut étendre à tout autre nombre de lignes. Puis, à cause qu'il y a toujours une infinité de divers points qui peuvent satisfaire à ce qui est ici demandé, il est aussi requis de connoître et de tracer la ligne dans laquelle ils doivent tous se trouver, et Pappus dit que, lorsqu'il n'y a que trois ou quatre lignes droites données, c'est en une des trois sections coniques; mais il n'entreprend point de la déterminer ni de la décrire, non plus que d'expliquer celles où tous ces points se doivent trouver lorsque la question est proposée en un plus grand nombre de lignes. Seulement, il ajoute que les anciens en avoient imaginé une qu'il montroient y être utile, mais qui sembloit la plus manifeste et qui n'étoit pas toutefois la première, ce qui m'a donné occasion d'essayer si, par la méthode dont je me sers, on peut aller aussi loin qu'ils ont été. »

Ce problème était admirablement choisi pour montrer les avantages du nouveau système de *Géométrie*, parce que la mise en équation reste la même, quel que soit le nombre des lignes données et quelle que soit, par conséquent, la difficulté du problème. Descartes montre d'abord que, si l'on considère en particulier une des droites données, qu'on désigne par y la ligne qui doit être menée du point cherché à cette droite, et par x la distance de son pied à un point marqué sur cette même droite, toutes les autres lignes qui devront être menées aux autres droites données s'exprimeront « chacune par trois termes, dont l'un est composé

de la quantité inconnue y, multipliée ou divisée par quelque autre connue, et l'autre de la quantité inconnue x, aussi multipliée et divisée par quelque autre connue, et, le troisième, d'une quantité toute connue. » Puis il ajoute : « Vous voyez aussi que, multipliant plusieurs de ces lignes l'une par l'autre, les quantités x et y, qui se trouvent dans le produit, n'y peuvent avoir que chacune autant de dimensions qu'il y a eu de lignes à l'explication desquelles elles servent, qui ont été ainsi multipliées, en sorte qu'elle n'auront jamais plus de deux dimensions en ce qui ne sera produit que par la multiplication de deux lignes, ni plus de trois en ce qui ne sera produit que par la multiplication de trois, et ainsi à l'infini.

« De plus, à cause que, pour déterminer le point cherché, il n'y a qu'une seule condition qui soit requise, à savoir que ce qui est produit par la multiplication d'un certain nombre de ces lignes soit égal ou ait la proportion donnée à ce qui est produit par la multiplication des autres, on peut prendre à discrétion l'une des deux quantités x ou y et chercher l'autre par cette équation. Ainsi, prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y, on en trouvera aussi infinies pour la ligne x, et on aura une infinité de divers points, par le moyen desquels on décrira la ligne demandée. »

Il est remarquable que Descartes groupait ensemble les courbes de deux degrés consécutifs : « Pour comprendre ensemble toutes les courbes qui sont en la nature et les distinguer par ordre en certains genres, je ne sache rien de meilleur que de dire que tous leurs points ont nécessairement quelque rapport à tous les points d'une ligne droite, qui peut être exprimé par quelque équation, en tous par une même, et que, lorsque cette équation ne monte

que jusqu'au rectangle de deux quantités indéterminées, ou bien au quarré d'une même, la ligne courbe est du premier et plus simple genre, dans lequel il n'y a que le cercle, la parabole, l'hyperbole et l'ellipse qui soient compris ; mais que, lorsque l'équation monte jusqu'à la troisième ou quatrième dimension des deux ou de l'une des deux quantités indéterminées, elle est du second ; et que, lorsque l'équation monte jusqu'à la cinquième ou sixième dimension, elle est du troisième, et ainsi des autres à l'infini. »

Après avoir ainsi établi les bases de son système de coordonnées, Descartes en fait connaître les usages : « De cela seul qu'on sait le rapport qu'ont tous les points d'une ligne courbe à tous ceux d'une ligne droite, ainsi que je l'ai expliqué, il est aisé de trouver aussi le rapport qu'ils ont à tous les autres points et lignes donnés, et ensuite de connaître les diamètres, les aissieux, les centres et autres lignes ou points à qui chaque ligne courbe aura quelque rapport plus particulier ou plus simple qu'aux autres, et ainsi d'imaginer divers moyens pour les décrire et d'en choisir les plus faciles, et même on peut aussi par cela seul trouver quasi tout ce qui peut être déterminé touchant la grandeur de l'espace qu'elles comprennent, sans qu'il soit besoin que j'en donne plus d'ouverture, et enfin, pour ce qui est de toutes les autres propriétés qu'on peut attribuer aux lignes courbes, elles ne dépendent que de la grandeur des angles qu'elles font avec quelques autres lignes. Mais, lorsqu'on peut tirer des lignes droites qui les coupent à angles droits, aux points où elles sont rencontrées par celles avec qui elles font les angles qu'on veut mesurer, ou, ce que je prends ici pour le même, qui coupent leurs contingentes, la grandeur de ces angles n'est pas plus malaisée à

trouver que s'ils étoient compris entre deux lignes droites. C'est pourquoi je croirai avoir mis ici tout ce qui est requis pour les éléments des lignes courbes, lorsque j'aurai généralement donné la façon de tirer des lignes droites qui tombent à angles droits sur tels de leurs points qu'on voudra choisir; et j'ose dire que c'est ceci le problème le plus utile et le plus général, non seulement que je sache, mais même que j'aie jamais désiré de savoir en *Géométrie.* »

La solution que donne Descartes de ce problème général des tangentes ou plutôt des normales est celle sans doute qui s'est présentée la première à son esprit, et il la donne sans chercher à savoir s'il en peut exister une meilleure. Au lieu de déterminer directement l'équation de la tangente par la même règle algébrique qu'il va mettre en usage, il cherche celle du cercle qui aurait pour centre le pied de la normale sur l'axe des x, et pour rayon la distance de ce pied au point donné de la courbe; il exprime pour cela que l'équation résultant de l'élimination de x, par exemple, entre les équations du cercle et de la courbe, a deux racines égales à l'ordonnée du point de contact; c'est-à-dire que son premier membre est divisible par le quarré de y moins cette coordonnée. L'équation sur laquelle il opère a un degré plus élevé qu'il n'est nécessaire.

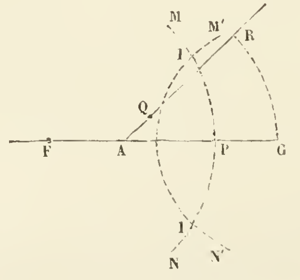
Descartes s'en aperçut, peu de temps après la publication de son livre, et ses lettres renferment l'indication d'une méthode moins détournée.

Notons encore qu'une conséquence toute naturelle de l'adoption du système de coordonnées de Descartes fut la réalisation des solutions négatives qui jusqu'alors avaient simplement été traitées de fausses. Ce fut un nouveau titre pour Descartes : les valeurs

négatives des inconnues recevant une interprétation en Géométrie analytique, on s'est habitué à en rechercher le sens dans toutes les questions où les équations les présentaient, ce qui a en quelque sorte doublé l'étendue du champ des formules et permis de ramener toutes les questions à un nombre moitié moindre. Observons toutefois que, sous ce rapport, la pratique a de beaucoup devancé la théorie, qui ne prit naissance que bien plus tard. Mais c'est toujours ce qui arrive ; on s'empresse toujours plus à appliquer les méthodes nouvelles qu'à les éclaircir.

La solution du problème des tangentes ou des normales est suivie de la théorie des *ovales* que Descartes voulait faire servir à la construction des lentilles convergentes. Voici la définition de l'une de ces ovales :

Fig. 1.



F, G et A (*fig.* 1) sont trois points en ligne droite, choisis à volonté; AR est une droite quelconque passant par le point A. Du point F comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrit une circonférence MPN qui coupe FAG en P; on prend AQ tel que

$\frac{AQ}{AP}$ ait une valeur donnée moindre que 1, enfin, AR ayant été pris égal à AG, on décrit, du point G comme centre, avec RQ comme rayon, une circonférence M'N', qui coupe la première aux deux points I; ces deux points appartiennent à l'ovale, qui passe au point A et est symétrique par rapport à FG.

La dernière partie de la *Géométrie* de Descartes ne traite plus que de l'Algèbre. Après avoir reproduit d'après Viète, mais plus simplement, la théorie de la transformation des équations et ses usages, Descartes traite d'abord de la recherche des racines commensurables et de la simplification d'une équation pour laquelle on en a trouvé; il passe ensuite à la résolution des équations du troisième et du quatrième degré et à la construction de leurs racines par des intersections de coniques. Il démontre de la manière suivante que ces racines ne pourraient pas être construites au moyen de la règle et du compas seulement : « pour ce qui est des problèmes solides, que j'ai dit ne pouvoir estre construits, sans qu'on y emploie quelque ligne plus composée que la circulaire, c'est chose qu'on peut assez trouver, de ce qu'ils se réduisent tous à deux constructions, en l'une desquelles il faut avoir tout ensemble les deux points, qui déterminent deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données: et en l'autre les deux points qui divisent en trois parties égales un arc donné : car, d'autant que la courbure du cercle ne dépend que d'un simple rapport de toutes ses parties au point qui en est le centre, on ne peut aussi s'en servir qu'à déterminer un seul point entre deux extrêmes, comme à trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes droites données, ou diviser en deux un arc donné : au lieu que la courbure des sections coniques, dépendant tou-

jours de deux diverses choses, peut aussi servir à déterminer deux points différents; » la remarque, je crois, n'avait pas été faite avant Descartes.

Nous avons à dessein omis de mentionner la règle des signes, pour pouvoir en parler avec plus de détails. Voici tout ce qu'en dit Descartes : il vient de former le premier membre de l'équation

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0,$$

en faisant le produit des facteurs $(x-2)$, $(x-3)$, $(x-4)$ et $(x+6)$, pour montrer, d'une part, qu'une équation peut avoir autant de racines qu'il y a d'unités dans son degré, et, de l'autre, que ces racines peuvent être aussi bien vraies que fausses (positives que négatives) mais qu'elle ne peut pas en avoir davantage. Et il ajoute :

« On connoist aussi de cecy combien il peut y avoir de vrayes racines, et combien de fausses en chaque équation. A sçavoir, il y en peut avoir autant de vrayes que les signes + et — s'y trouvent de fois estre changez; et autant de fausses qu'il s'y trouve de fois deux signes + ou deux signes — qui s'entre-suivent. Comme en la dernière, à cause qu'après $+x^4$ il y a $-4x^3$, qui est un changement du signe + en —, et après $-19xx$ il y a $+106x$, et après $+106x$, il y a -120, qui sont encore deux autres changemens, on connoist qu'il y a trois vrayes racines et une fausse, à cause que les deux signes — de $4x^3$ et $19xx$ s'entresuivent. »

Autant que je m'en souviens, j'ai lu autrefois, dans les œuvres de Descartes, une véritable démonstration de son beau théorème, mais je ne la retrouve pas. Cependant, l'édition que j'ai sous les yeux, qui est de 1664, doit être conforme à la première, Des-

cartes étant mort en 1650 ; la démonstration que j'ai lue dans ma jeunesse, et qui était complète, quoiqu'elle ne contînt que cinq ou six lignes, avait sans doute été ajoutée, sous les yeux de Descartes, par un de ses commentateurs et amis.

Quoi qu'il en soit, le laconisme de Descartes dans le passage que je viens de citer explique et justifie les critiques de Wallis, le dénégations de Rolle et l'utile intervention de de Gua.

La Mécanique.

Il ne nous reste plus qu'à dire un mot des vues de Descartes en Mécanique.

On trouve, dans ses lettres, les preuves qu'il rejetait l'horreur du vide et croyait à la pesanteur de l'air : « L'eau, dit-il, ne demeure pas dans les vaisseaux par la crainte du vuide, mais à cause de la pesanteur de l'air. » La lettre qui contient ce passage paraît antérieure à la publication des découvertes de Torricelli.

Dans une autre adressée à Carcavi, postérieurement à l'expérience du Puy-de-Dôme, il demande des nouvelles de cette expérience que, dit-il, il avait, deux ans auparavant, conseillée à Pascal.

On n'a de lui, sur la Mécanique, qu'un traité en quelques pages, écrit pour le père de Huyghens, mais qui a été joint au *Discours de la Méthode* dans quelques éditions.

Ce traité est intitulé : *Explication des machines et engins par l'aide desquels on peut, avec une petite force, lever un fardeau fort pesant.*

« L'invention de tous ces engins n'est fondée, dit Descartes, que sur un seul principe, qui est que la même force qui peut lever un poids, par exemple, de 100 livres à la hauteur de deux

pieds, en peut aussi lever un de 200 livres à la hauteur d'un pied, ou un de 400 à la hauteur d'un demi-pied, et ainsi des autres, si tant est qu'elle lui soit appliquée. »

Cet enoncé suffit pour montrer que les idées de Descartes en Mécanique n'étaient pas très nettes; on y voit en effet qu'un poids n'est pas une force ou qu'une force est autre chose qu'un poids; autrement il faudrait traduire: la même force qui peut en neutraliser une autre sur un parcours de deux pieds en neutraliserait une double sur un parcours d'un pied. Le mot *force* n'a donc pas, dans le langage de Descartes, le sens que nous lui donnons. Il est évident que Descartes entend par force une somme d'efforts, mais qu'est-ce qu'une somme d'efforts? est-ce ce que nous appelons impulsion totale, $\int F dt$? alors le principe serait faux. Est-ce un travail $\int F ds$? il le faudrait pour que le principe fût vrai. Mais alors l'énoncé ne serait que la traduction d'une remarque faite sur les conditions d'équilibre des différentes machines et ne constituerait pas un principe.

En fait, c'est bien un travail que, sans le savoir, Descartes entend par le mot *force*. Ce sont évidemment les conditions connues de l'équilibre de la poulie, du levier et du treuil qui lui ont suggéré son principe, quoiqu'il paraisse au contraire s'en aider pour retrouver ces conditions. Il applique, il est vrai, la même méthode à l'équilibre d'un corps placé sur un plan incliné, mais la question venait d'être traitée par Stevin.

Descartes a dit quelque part, des ouvrages de Galilée sur la Mécanique, qu'il n'y avait rien trouvé dont il eût désiré être l'auteur.

Il admet dans sa *Théorie du choc* le principe de la conservation de la quantité de mouvement, fondé sur l'idée de l'immuta-

bilité divine; et un autre, à peu près inintelligible, qui n'est plus fondé sur rien du tout.

Il conclut de ces principes, pour le cas de corps absolument durs, que :

1° Si deux corps égaux se choquent avec des vitesses égales, ils se réfléchiront en arrière, chacun avec sa vitesse;

2° Si l'un des deux est plus grand que l'autre, et que les vitesses soient égales, le moindre seul sera réfléchi, et ils iront tous deux du même côté avec les vitesses qu'ils avaient avant le choc.

3° Si deux corps égaux et ayant des vitesses inégales en sens contraires viennent à se choquer, le plus lent sera entraîné, de sorte que leur vitesse commune sera égale à la moitié de la somme de celles qu'ils avaient avant le choc;

4° Si l'un des deux corps est en repos et qu'un autre moindre que lui vienne le frapper, ce dernier se réfléchira sans imprimer à l'autre aucun mouvement;

5° Si un corps en repos est choqué par un plus grand, il sera entraîné et ils iront ensemble du même côté, avec une vitesse qui sera à celle du corps choquant, comme la masse de celui-ci est à la somme des masses de l'un et de l'autre.

On voit par ces énoncés que Descartes n'avait pas une intelligence bien nette de son principe de la conservation de la quantité de mouvement, dans le cas même de mouvements rectilignes.

Les tourbillons de Descartes.

Ces tourbillons, qui ont successivement excité l'admiration, puis le rire, et enfin la pitié, avaient été d'abord imaginés par notre philosophe pour expliquer les phénomènes dus à la pesan-

teur, mais, comme il n'en coûtait pas davantage, Descartes rendait compte, du même coup, des mouvements des planètes autour du Soleil, de la Lune autour de la Terre, etc.; tous ces phénomènes n'étaient que les manifestations diverses d'une même cause très simple : l'espace était rempli d'une substance éthérée infiniment peu dense, mais animée d'un mouvement rotatoire, d'une vitesse... capable de donner le vertige au plus philosophe.

M. Daubrée a publié en 1880, dans le *Journal des Savants*, un très intéressant article sur Descartes considéré comme l'un des créateurs de la Cosmologie et de la Géologie.

M. Daubrée s'étend peu, naturellement, sur les titres cosmologiques de Descartes, mais il lui tient compte avec justice du changement apporté par lui dans la manière de penser au sujet de l'Univers.

« Dans une synthèse des plus hardies, dit-il, et dont l'esprit humain n'avait pas encore offert d'exemple, Descartes, continuant à transporter la Mathématique dans des régions entièrement nouvelles, osait, le premier, considérer tous les phénomènes célestes comme de simples déductions des lois de la Mécanique.

« Affirmer l'idée mère de la belle théorie cosmogonique par laquelle Laplace a couronné le magnifique édifice dont Copernic, Képler et Newton avaient élevé les assises; proclamer l'unité de composition de l'univers physique; telles sont, entre autres, les propositions fondamentales qu'avait suggérées à Descartes une intuition merveilleuse qui n'appartient qu'au génie. »

Mais c'est surtout pour les idées qu'il a émises sur les révolutions du globe que M. Daubrée réclame en faveur de Descartes, dont les titres, à cet égard, avaient été en effet un peu trop passés sous silence.

Descartes ne dit pas que l'intérieur de la Terre soit encore aujourd'hui à l'état de fusion, mais il admet que toute la matière qui compose notre globe a été autrefois incandescente et il explique, par le refroidissement lent des couches extérieures, la formation de la croûte solide, d'abord très mince, les dislocations partielles que cette couche a éprouvées, l'apparition des montagnes et des vallées, la déviation des couches, de l'horizontalité, etc.

M. Daubrée a exhumé une figure très remarquable que Descartes avait dessinée pour expliquer ses conceptions géologiques.



LA FAILLE (JEAN-CHARLES DE).

(Né à Anvers en 1597, mort à Barcelone en 1652.)

Jésuite. Il professa les Mathématiques à Dôle, à Louvain, à Madrid, puis devint professeur de l'infant don Juan d'Autriche; il précéda de quelques années le père Guldin dans ses recherches sur les centres de gravité. Ses principaux ouvrages sont : *Theses mechanicæ* (1625); *Theoremata de centro gravitatis* (Anvers, 1632); *De centro gravitatis partium circuli et ellipsis theoremata* (Louvain, 1632). Il joignait, dans ce dernier ouvrage, aux solutions des problèmes indiqués dans le titre, des remarques sur la dépendance mutuelle des questions relatives à la rectification des courbes et à la recherche des centres de gravité de leurs arcs, à la quadrature des courbes et à la recherche des centres de gravité de leurs segments.

DE RHEITA (ANTOINE-MARIE-SCHYRLE).

(Né en Bohême en 1597, mort à Ravenne en 1660).

Capucin. Il a rendu un véritable service en exécutant le télescope à quatre verres convexes où les images sont redressées

comme dans le télescope à trois verres convexes du P. Scheiner, mais moins déformées sur les bords et moins irisées, et le télescope binocle, qui est devenu la lorgnette.

C'est le P. de Rheita qui a imaginé les noms d'*oculaire* et d'*objectif.*

Quant à ses ouvrages astronomiques, Delambre les traite de capucinades.



RICCIOLI (JEAN-BAPTISTE).

(Né à Ferrare en 1598, mort à Bologne en 1671.)

Entré dans la Compagnie de Jésus, il se livra tout entier à l'étude de l'Astronomie, par ordre de ses supérieurs, qui pensaient trouver en lui un antagoniste à opposer aux astronomes du Nord, lesquels se plaignaient que le système de Copernic n'avait été jusqu'alors jugé, en Italie, que par des théologiens. Chargé d'attaquer cet admirable système, Riccioli entassa tous les arguments qu'il put imaginer; mais, à la manière dont il en parle, « on croirait, dit Delambre, entendre un avocat chargé malgré lui d'une cause qu'il sait mauvaise, qui n'apporte que des arguments pitoyables, parce qu'il n'y en a pas d'autres, et qui voit lui même que sa peine est perdue. » Riccioli convenait, d'ailleurs, que, envisagé comme hypothèse, le système de Copernic est le plus beau, le plus simple et le mieux imaginé.

« Jamais, dit-il, on n'a assez admiré et jamais on n'admirera assez le génie, la profondeur, la sagacité de Copernic, qui, par trois mouvements d'un globule comme la Terre, est parvenu à expliquer ce que les astronomes n'ont jamais pu représenter sans

une folle complication de machines, et qui, dispensant les fixes de ce mouvement diurne si rapide, qui s'accorde si difficilement avec leur mouvement général autour des pôles de l'écliptique, explique si heureusement les stations et les rétrogradations, la précession des équinoxes; qui, enfin, comme Hercule, a pu soutenir seul un poids qui avait écrasé tant d'Atlas. » C'est après ce magnifique éloge que Riccioli passe à la réfutation. La transition est bonne à noter : « Heureux, ajoute-t-il, s'il avait su se contenir dans les bornes de l'hypothèse ! »

Malgré ses erreurs systématiques, on ne peut nier que ce savant, égaré dans une mauvaise voie, n'ait rendu quelques services à l'Astronomie, à la Géographie et à la Chronologie. Ses principaux ouvrages, dont nous allons dire quelques mots, sont : *Almagestum novum Astronomiam veterem novamque continens, observationibus aliorum et propriis novisque theorematibus, problematibus, ac tabulis promotam* (Bologne, 1653); *Astronomia reformata* (1665); *Geographiæ et hydrographiæ reformatæ libri XII* (1661); *Chronologia reformata et ad certas conclusiones reducta* (1669).

L'*Almagestum novum* débute par cette preuve de la nécessité de la réforme grégorienne, que le sang de saint Janvier ne manquait jamais de se liquéfier le 19 septembre (nouveau style), preuve suffisante de l'erreur des almanachs. On pourrait en extraire beaucoup d'autres traits de même force. Cependant l'auteur est intelligent, mais décidé à défendre une mauvaise cause.

Il avait songé à employer le pendule à la mesure du temps, « avant d'avoir lu le livre de Galilée. » Contredire les hérétiques est bien, mais les dépouiller est encore mieux.

Il propose de faire tourner Jupiter et Saturne autour de la

Terre, Mercure, Vénus et Mars autour du Soleil, et le Soleil autour de la Terre.

L'obliquité doit être constante, parce que Dieu n'a pas dû vouloir obliger les astronomes à recommencer sans cesse les tables de l'écliptique.

La libration de la Lune, qui commençait à préoccuper les astronomes, donne cependant à Riccioli l'occasion d'ébaucher quelques idées heureuses.

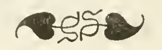
Il croyait voir dans l'anneau de Saturne deux satellites distincts, formant cependant une sorte d'ellipse. La figure exacte du singulier appendice de Saturne n'a été déterminée que plus tard par Huyghens.

En somme, Riccioli a fort peu fait pour la Science; ses ouvrages ne sont guère qu'un long bavardage, où toutes les opinions et tous les systèmes sont exposés, sans préférence marquée pour aucun, et accompagnés de réflexions peu judicieuses.

HARDY (CLAUDE).

(Né au Mans vers 1598, mort à Paris en 1678.)

Avocat au parlement de Paris et plus tard conseiller au Châtelet, il avait fait une étude profonde des Mathématiques, et Descartes appréciait beaucoup son mérite. Il le choisit pour arbitre, avec Mydorge, dans sa discussion au sujet du traité *De maximis et minimis* de Fermat. Hardy a donné une traduction latine des *Données* d'Euclide (1625).



NEUVIÈME PÉRIODE.

De CAVALIERI, né en 1598,
à HUYGHENS, né en 1629.

Noms des savants de cette Période.

	Né en	Mort en
Cavalieri	1598	1647
de Lalouère	1600	1664
de Fermat	1601	1665
de Beaune	1601	1652
Kircher	1601	1680
Fontana	1602	
Roberval	1602	1675
Otto de Guericke	1602	1686
Dodson		1657
Glauber	1603	1668
de Malvasia	1603	1664
Courcier	1604	1692
Bouliau	1605	1694
Frénicle de Bessy	1605	1675
Borelli	1608	1679
Torricelli	1608	1647
Wharton	1610	1673
Bobart	1610	1679
Ferdinand II de Toscane	1610	1670
Hevelius	1611	1687
Bosse	1611	1678
Tacquet	1612	
Perrault	1613	1688
Niceron	1613	1646
Léopold de Médicis	1613	
Clersellier	1614	1686
Van Heuraet	1615	
Wallis	1616	1703
de Sarassa	1618	1667
Mouton	1618	1694
Grimaldi	1618	1663
Horrox (ou Horrocks)	1619	1641
Crabtée		
Schooten	1620	1661
Lord Brouncker	1620	1684

	Né en	Mort en
Mercator	1620	1687
Picard	1620	1682
Mariotte	1620	1684
Le Fèvre	1620	1674
Gascoygne	1620	1644
Borel	1620	1689
Pecquet	1620	1674
Viviani	1622	1703
de Sluse	1622	1685
Rooke	1623	1662
Pascal	1623	1662
Collins	1624	1683
Guarini	1624	1683
Sydenham	1624	1689
de Witt (Jean)	1625	1672
Bartholin (Erasme)	1625	1698
Cassini (Dominique)	1625	1712
Buono	1625	1662
Redi (Francisco)	1626	1698
Boyle	1627	1691
Malpighi	1628	1694



NEUVIÈME PÉRIODE

Cette période voit naître et se développer la méthode des indivisibles, qui peut se rattacher, au point de vue géométrique, à celle qu'Archimède employa pour comparer les segments de conoïdes aux segments sphériques, mais qui en diffère en ce qu'elle est fondée sur le calcul et acquiert par là plus de généralité.

Le calcul des indivisibles peut être considéré comme équivalant à notre calcul intégral, borné à l'intégration des fonctions différentielles. Il en diffère cependant en ce qu'il est indépendant de toute autre théorie.

Notre calcul intégral n'a pas, à proprement parler, d'existence propre : sauf quelques transformations et réductions indispensables, il n'est que l'inverse du calcul différentiel, c'est-à-dire que nos procédés d'intégration se réduisent à comparer les fonctions placées sous le signe sommatoire, au tableau des différentielles connues. Au contraire la méthode des indivisibles n'emprunte rien à aucune autre et se suffit à elle-même, parce que les sommations s'y font directement.

On verra peut-être avec étonnement que le calcul intégral ait pris naissance avant le calcul différentiel; cependant cela ne doit

pas surprendre extrêmement : les problèmes de la quadrature des aires planes contenues dans des contours curvilignes, de la cubature des volumes enfermés dans des surfaces courbes, de la rectification des lignes courbes, ou de la quadrature des surfaces courbes s'imposent en effet si bien d'eux-mêmes à l'attention qu'ils sont posés de toute antiquité. Tandis que celui des affections intimes des courbes ou surfaces, dans leurs éléments infinitésimaux, ne pouvait être imaginé qu'à la suite de recherches déjà très délicates. Ainsi le premier venu a l'idée de la recherche de l'aire d'une surface courbe, tandis que, par exemple, Voltaire n'est même pas parvenu à comprendre ce qu'on pouvait bien entendre par le cercle osculateur à une courbe en l'un de ses points, quoiqu'il connût la solution du problème.

La méthode des indivisibles, remplacée presque aussitôt après son invention par le calcul intégral, a laissé peu de traces dans les esprits : on la connaît très peu ; elle mérite cependant d'être étudiée avec soin : elle correspond en effet à une phase très importante de l'évolution de l'esprit mathématique.

Nous n'entrerons pas ici dans le détail des solutions obtenues, dans la période qui nous occupe, des quatre grands problèmes énoncés plus haut : on trouvera ces détails dans l'analyse que nous donnerons des travaux des principaux instaurateurs de la méthode. Il suffira ici, pour caractériser cette méthode, de considérer en particulier le problème de la quadrature des aires planes enfermées dans des contours curvilignes, auquel se ramènent plus ou moins immédiatement les trois autres.

Soit

$$y = f(x)$$

l'équation, en coordonnées rectangulaires, par exemple, de la

courbe dont on veut obtenir le segment compris entre les deux ordonnées $x = x_0$ et $x = x_1$:

On trouve d'abord, très nettement énoncé dans Roberval, ce principe que, si $f(x)$ se compose de plusieurs parties positives ou négatives, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$,... l'aire cherchée se compose des aires des courbes

$$y = \varphi(x),$$
$$y = \psi(x),$$
$$y = \chi(x);$$
$$\cdots\cdots\cdots,$$

combinées avec les mêmes signes.

C'est l'équivalent de notre principe que l'intégrale d'une somme est la somme des intégrales des parties. Au point de vue concret, il se traduit, chez les géomètres de la période qui nous occupe, par cette observation que l'aire d'une courbe ne dépend pas de la figure droite ou courbe de la base à partir de laquelle sont comptées les ordonnées de cette courbe, mais seulement de la grandeur de ces ordonnées et de la loi qui les lie à la distance qui les sépare de la première d'entre elles.

Cela posé, et l'ordonnée $y = f(x)$ de la courbe à quarrer étant réduite autant que possible, si l'on conçoit la distance $x_1 - x_0$ des ordonnées extrêmes, divisée en un très grand nombre n de parties égales, dont l'une sera h, l'un des éléments de l'aire à obtenir sera

$$hf(x)$$

et cette aire sera elle-même représentée par

$$\Sigma_0^{n-1} hf(x_0 + nh);$$

ou, du moins, l'aire cherchée sera fournie par la limite de cette somme, pour n infini.

La formule n'est pas encore notée ainsi; elle n'est même énoncée qu'en langage ordinaire, mais cela importe peu : elle n'en équivaut pas moins absolument à la nôtre :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx;$$

seulement ce n'est pas précisément la somme

$$\Sigma_0^{n-1}\, hf(x_0 + nh),$$

que recherchent les Géomètres de la période qui nous occupe, du moins jusqu'à Pascal : c'est le rapport de l'aire en question au rectangle qui aurait la même base que le segment, et pour hauteur l'ordonnée extrême de la courbe, c'est-à-dire

$$\frac{\Sigma_0^{n-1}\, hf(x_0 + nh)}{nhf(x_1)};$$

le motif de leur préférence est que ce rapport se transforme immédiatement en

$$\frac{\Sigma_0^{n-1}\, f(x_0 + nh)}{nf(x_1)},$$

et que l'évaluation d'une somme finie d'éléments infiniment petits se trouve ainsi remplacée par celle du rapport de deux sommes infinies d'éléments finis, en nombre illimité. Cette préférence s'explique aisément parce que les méthodes de calcul n'ayant pas encore reçu les développements qui seraient nécessaires, c'est au moyen de figures que se font les démonstrations, même arithmétiques; or, les éléments finis des termes du rapport

peuvent être figurés, tandis que les éléments infiniment petits de la somme ne pourraient pas l'être.

Les rapports appartenant au type

$$\frac{\Sigma_0^{n-1} f(x_0 + nh)}{n f(x_1)},$$

dont on se proposa de trouver les valeurs limites pour n infini, se réduisirent d'abord à ceux qui correspondent au cas où $f(x)$ est un monôme Ax^m; Cavalieri ne va pas plus loin et encore n'examine-t-il que les hypothèses où m a l'une des valeurs 2, 3 et 4. Toutefois il donne la règle générale, à laquelle il arrive par analogie. Au reste, les démonstrations de Cavalieri sont exclusivement fondées sur des considérations géométriques. Il reçut quelque secours d'une note de Beaugrand, que lui avait envoyée le P. Mersenne, en sorte que la France eut déjà une part importante dans cette première ébauche de la théorie.

La remarque de Roberval permettait d'étendre la méthode aux cas où $f(x)$ serait un polynôme quelconque, en sorte que, cette remarque étant facile à faire, on peut dire que Cavalieri savait déjà quarrer les paraboles de tous les ordres, simples ou composées.

Roberval n'ajouta rien à cette théorie, qu'il ne mentionne même pas, mais ses recherches sur la cycloïde l'amenèrent à considérer des sommes de sinus et de quarrés de sinus d'arcs en progression arithmétique; seulement les arcs qu'il considère s'étendent tout le long de la circonférence, ce qui simplifie beaucoup les difficultés, parce qu'il se produit alors des réductions importantes. Au reste il ne se propose pas la quadrature du cercle, qu'il suppose connue et dont il se sert pour la quadrature de la cycloïde.

Wallis débarrassa la théorie de la quadrature des paraboles de toutes considérations géométriques : le rapport

$$\frac{\Sigma_0^{n-1}(nh)^m}{n(nh)^m}$$

se réduit à

$$\frac{\Sigma_0^{n-1}(n)^m}{n^{m+1}};$$

et Wallis fait très bien voir qu'il ne s'agit que d'obtenir la limite pour $n = \infty$ du rapport de la somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des nombres entiers de 1 à n à n fois la $m^{\text{ième}}$ puissance du dernier; mais, ne pouvant calculer la somme $\Sigma_0^{n-1} n^m$, il se borne à obtenir de proche en proche les valeurs limites du rapport qui l'occupe. Toutefois il parvint, par induction, à la formule générale du rapport,

$$\frac{1}{m+1},$$

déjà aperçue par Cavalieri.

C'est Pascal qui, sur ce point, compléta la théorie en apportant des démonstrations générales. Il calcula, comme nous le ferions aujourd'hui, les sommes successives des puissances semblables et entières d'une suite de nombres en progression arithmétique. Il n'y a de différence qu'en ce que, ne connaissant pas la formule littérale du coefficient du terme général de la puissance m d'un binôme, il donne, dans les exemples qu'il prend, leurs valeurs numériques aux coefficients.

Wallis voulut étendre ses inductions au cas d'une hyperbole

$$y = \frac{1}{x^m} = x^{-m},$$

qu'il imagina de faire rentrer dans le genre parabole en inventant pour cela les exposants négatifs, mais ses procédés de calcul ne lui permettaient de trouver la limite du rapport

$$\frac{\Sigma(n)^m}{n^{m+1}},$$

qu'autant que la somme Σ aurait pour limite inférieure $n = 0$. Le premier terme de la somme se trouvait dès lors infini et le géomètre anglais ne put lever la difficulté qui en résultait. Au contraire la méthode de Pascal lui permettait de faire commencer la progression des nombres à un terme quelconque, même n'appartenant pas, il le fait remarquer, à la suite des multiples entiers de la raison.

J'ai déjà dit que Roberval avait donné des théorèmes remarquables sur les sommes de sinus ou de quarrés de sinus d'arcs en progression arithmétique allant de 0 à π ou à 2π, mais qu'il se servait accessoirement de ces théorèmes, sans prétendre à calculer l'aire du cercle.

Wallis avait eu cette visée, et il voulut faire rentrer encore la courbe

$$y = \sqrt{1 - x^2},$$

dans le genre parabole. Il serait superflu de dire qu'il n'y parvint pas, mais il est remarquable qu'il trouva, autant que faire se pouvait, la quadrature du cercle en découvrant sa fameuse formule de π, par des considérations, au reste, bien difficiles à saisir.

Il s'en faut beaucoup que ce court résumé puisse donner une idée même approximative du talent déployé par les géomètres

dont je viens de parler : il ne se rapporte qu'à la partie algébrique ou plutôt arithmétique de la méthode des indivisibles, considérée sous sa première forme. C'est par les combinaisons géométriques qu'ils imaginent pour se servir utilement de moyens encore si faibles et surtout pour ramener les unes aux autres non seulement les quatre grandes questions énoncées plus haut, mais aussi celle des centres de gravité, que les géomètres de cette période montrent un vrai génie. Mais nous ne pourrions entrer ici dans les détails de ces combinaisons: nous les ferons connaître autant que possible dans l'analyse des travaux des divers inventeurs.

Quant à Pascal, il doit être étudié à part : nous n'avons, dans ce qui précède, parlé que de son intervention dans la solution du problème de la quadrature des paraboles de tous les degrés; nous verrons que ses ouvrages contiennent, sous une forme vicieuse il est vrai, tous les principes du calcul intégral, et jusqu'aux formules de quadrature des expressions de la forme

$$\sin^m x\,dx.$$

Les démonstrations sont purement géométriques, ce qui nous empêche de les résumer ici; aucune formule n'est notée; le signe Σ n'est même pas employé; de plus, Pascal parle encore identiquement le langage de Cavalieri, c'est-à-dire qu'il supprime toujours, dans tous ses énoncés, les facteurs infiniment petits que nous appelons dx, dy, ds, etc., et ne conserve que les sommes infinies des abscisses, des ordonnées, des arcs, etc. Pour cela, quand il doit introduire dans un même énoncé plusieurs sommes que nous représenterions par

$$\int F_1(x)\,dx,\quad \int F_2(y)\,dy,\quad \int F_3(s)\,ds,$$

par exemple, il a toujours soin de supposer égaux entre eux les dx, les dy et les ds, ce qui lui permet de les supprimer comme facteur commun, de sorte que ses équations ont lieu entre

$$\Sigma F_1(x), \quad \Sigma F_2(y) \quad \text{et} \quad \Sigma F_3(s),$$

s'il s'agissait des intégrales correspondantes.



L'Algèbre des Modernes.

C'est vers le milieu du XVIIe siècle que les géomètres prirent l'habitude de supposer les grandeurs, sur lesquelles ils spéculaient, représentées par leurs mesures ou leurs rapports à une unité, ces rapports dussent-ils être incommensurables.

Il restait, après Descartes, si peu de chose à faire pour achever la révolution et parvenir à notre point de vue, qu'on ne saurait assigner l'auteur de la dernière transformation, ce dernier changement ayant été consenti à peu près par tout le monde en même temps, à la suite principalement, sans doute, de l'introduction de l'usage des logarithmes, et par suite de l'habitude que l'on prit d'admettre dans les calculs des nombres incommensurables, ou, plus exactement, des nombres commensurables entachés d'erreurs qu'on pouvait réduire indéfiniment.

Je crois qu'il serait à peu près inutile de rechercher les noms des promoteurs de cette dernière évolution : peut-être Harriot et Wallis y contribuèrent-ils pour une bonne part; en tout cas, je la crois d'origine anglaise ou allemande, certainement protestante; au reste, il s'en faut beaucoup que tous les géomètres de cette époque parlent la même langue algébrique.

Ce nouveau changement de point de vue introduit une question intéressante dont nous devons dire un mot : dans la Géométrie ancienne, un rectangle de base A et de hauteur B est désigné par *ce qui est contenu sous* A *et* B ou *ce qui provient de* A *et de* B ; toute surface autrement délimitée est égale à un certain rectangle et par conséquent est toujours ce qui est contenu sous deux lignes; par exemple, le cercle est ce qui est contenu sous la circonférence et la moitié du rayon.

De même un parallélépipède rectangle est ce qui est contenu sous trois lignes, et tous les volumes autrement délimités sont ramenés à être aussi ce qui est contenu sous trois lignes.

Là le sens est toujours clair.

Les géomètres modernes supposent les dimensions linéaires de leurs figures rapportées à l'unité usuelle et ils prennent pour unités de surface et de volume le quarré et le cube construits sur cette unité.

Or, quels que soient la surface ou le volume qu'ils veuillent évaluer, ils trouvent toujours que leurs mesures sont les produits des mesures de deux ou de trois lignes.

Pourquoi cela?

Pourquoi la mesure d'une surface, par exemple, ne pourrait-elle pas être celle d'un élément linéaire de la figure qui la termine? Pourquoi un triangle ne pourrait-il pas contenir autant de mètres quarrés qu'une ligne formée convenablement d'éléments linéaires de ce triangle, côtés, hauteurs, bissectrices, médianes, rayons des cercles inscrit ou circonscrit, etc., contient de mètres?

La réponse est si facile qu'on n'aurait pas dû laisser subsister la question :

La règle à suivre pour former la longueur dont la mesure en mètres serait égale à la mesure en mètres quarrés d'une surface désignée, cette règle ne pourrait pas être générale, c'est-à-dire convenir à toutes les surfaces de même espèce. En effet, si elle convenait à toutes, elle conviendrait notamment à toutes celles de ces surfaces qui seraient semblables entre elles; mais, la règle étant supposée générale, elle assignerait à deux surfaces semblables, pour les représenter, les mesures de lignes homologues, ou de lignes composées de parties homologues; deux surfaces semblables seraient donc entre elles comme leurs lignes homologues.

Cette explication était nécessaire pour permettre de transporter à la Géométrie moderne le principe d'homogénéité établi par Viète sur d'autres considérations.

Progrès de l'Arithmétique.

La théorie des nombres n'avait fait aucun progrès depuis Théon de Smyrne et Diophante. Fermat lui fait faire un pas immense par la découverte des théorèmes qui portent son nom.

Cavalieri, Wallis et Pascal somment un grand nombre de suites.

Wallis trouve, pour la valeur du rapport de la circonférence au diamètre,

$$\pi = \frac{2.4.4.6.6.8.8\ldots}{3.3.5.5.7.7.9.9\ldots},$$

et établit les bases de la théorie de l'interpolation.

Le calcul des probabilités, qui avait pris naissance entre les mains de Lucas de Burgo, s'accroît par les travaux de Pascal et de Fermat.



Progrès de l'Algèbre.

De Beaune détermine les limites supérieure et inférieure des racines réelles d'une équation numérique; Pascal imagine son triangle arithmétique pour le calcul rapide des coefficients du développement d'une puissance désignée d'un binôme. Wallis introduit la notation des exposants fractionnaires et négatifs. Mercator découvre le développement en série de $L(1+x)$. De Sluse développe la méthode de construction des racines des équations algébriques par l'intersection de courbes. En même temps, l'Algèbre s'enrichit de la règle pour la décomposition des équations qui ont des racines égales.

Progrès de la Géométrie.

Dans cette neuvième Période, remplie par les travaux de Cavalieri, de Fermat, de Roberval, de Wallis et de Pascal, les méthodes de Descartes pour les tangentes et les maximums prennent des développements qui permettent de prévoir l'avénement prochain du calcul différentiel; en même temps les procédés sommatoires annoncent de même le calcul intégral.

Cette époque est au moins comparable, pour les progrès de la Géométrie, à celle d'Archimède, d'Apollonius et d'Euclide.

Sans revenir ici sur les travaux de Descartes, nous rappellerons

du moins sa méthode géométrique pour la construction des tangentes à toutes les épicycloïdes, méthode qui est devenue depuis la base de la théorie du centre instantané de rotation.

La méthode géométrique de Roberval pour les tangentes, mal présentée par un de ses élèves et encore moins comprise de ses contemporains, était complètement tombée dans l'oubli; elle a reparu avec éclat dans les applications de la Cinématique.

Tels sont les progrès généraux que subit la Géométrie, quant aux méthodes, durant cette période. Quant aux découvertes spéciales, elles ont aussi une grande importance : nous citerons notamment la découverte, capitale pour la théorie des coniques, de la propriété caractéristique d'un hexagone inscrit dans une de ces courbes; mais surtout celle de la plupart des belles propriétés de la cycloïde, sur lesquelles nous insisterons séparément.

Progrès de l'Astronomie.

Hévélius émet l'hypothèse du parabolisme des trajectoires des comètes; Mouton et Crabtée donnent des méthodes passables pour la détermination du diamètre apparent du Soleil, mais Picard imagine le micromètre à réticules mobiles. Picard applique de nouveau la méthode trigonométrique à la détermination de la longueur d'un degré du méridien, et trouve pour cette longueur 57021 toises, valeur assez approchée.

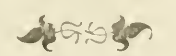


Progrès de la Mécanique.

Pascal jette les fondements de l'Hydrostatique et imagine la presse hydraulique; Torricelli établit son théorème relatif à la vitesse d'écoulement d'un liquide par un orifice percé en mince paroi; il fait voir que l'enveloppe de toutes les trajectoires de mobiles pesants lancés d'un même point dans toutes les directions, avec la même vitesse, est un paraboloïde, en dehors duquel aucun projectile ne peut parvenir; Wren et Wallis énoncent les lois du choc, le premier entre des corps élastiques, le second entre des corps mous; Wallis à ce propos énonce le principe de la conservation de la quantité de mouvement; Torricelli énonce la condition d'équilibre d'un système pesant à liaisons, soumis à l'action seule de la pesanteur.

Progrès de la Physique.

Fermat donne une nouvelle démonstration de la loi de la réfraction de la lumière; Kircher invente la lanterne magique; la chambre obscure est imaginée, on ne sait par qui; Otto de Guericke construit la première machine pneumatique et obtient la première étincelle électrique; Torricelli démontre la pesanteur de l'air et construit le premier baromètre; Mariotte découvre la loi de variation du volume d'un gaz sous l'influence d'une pression extérieure; Grimaldi observe le phénomène de la diffraction; Bartholin découvre celui de la double réfraction, dont Huyghens établira les lois.



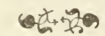
Progrès de la Chimie.

Nicolas le Fèvre signale la loi des dissolutions saturées et découvre l'acétate de mercure.



Progrès de la Physiologie.

Borelli étudie la structure des muscles au point de vue de la production des mouvements et fait, dans cette recherche, une judicieuse application de la théorie du levier; Perrault donne la théorie de l'organe de l'ouïe; Clersellier étudie les phases du développement des fœtus de vivipares.



Histoire de la cycloïde.

Cette courbe célèbre a d'abord porté le nom de *trochoïde*, que lui donne Roberval dans le traité qu'il en a laissé; Pascal la désigna ensuite sous le nom de *roulette;* tous les géomètres se sont depuis accordés à l'appeler *cycloïde*. Ce serait, paraît-il, Galilée qui en aurait eu le premier l'idée. Il dit, en effet, dans une lettre écrite à Torricelli en 1639, qu'il s'en était occupé quarante ans auparavant, et qu'il avait songé à en donner la figure aux arches des ponts. Torricelli raconte que, pour en déterminer l'aire, Galilée avait découpé dans une feuille mince la courbe et son cercle générateur et les avait pesés séparément; mais que, trouvant toujours le poids de la *cycloïde* un peu moindre que le triple de celui du cercle, il avait pensé que leurs aires étaient dans un rapport compliqué et avait cessé de s'occuper de leur comparaison.

C'est de 1634 que date en réalité l'histoire de la *cycloïde*, et c'est en France que furent résolues les premières difficultés relatives à cette courbe. Le P. Mersenne, qui avait en vain tenté de la quarrer, proposa en 1628 la question à Roberval, qui, ne se sentant pas encore de force à l'aborder, ne s'en occupa pas immédiatement. C'est en 1634, d'après Mersenne, qu'il résolut le problème, et il étendit même sa solution aux *cycloïdes* allongées et raccourcies. La découverte de Roberval serait en tous cas antérieure à 1637, puisque le P. Mersenne l'a publiée à cette date dans son *Harmonie universelle.* La priorité de Roberval est ainsi absolument incontestable, Galilée déclarant d'ailleurs, en 1640, dans une lettre adressée à Cavalieri, que l'aire de la *cycloïde* était encore un problème pour les géomètres italiens, et Torricelli confirmant le fait dans une lettre postérieure. Wallis et Carlo Dati ont donc eu tort de faire honneur à l'Italie de cette découverte; mais Pascal a eu encore plus tort de se laisser aller à d'injustifiables accusations de plagiat contre Torricelli, qui, sollicité à la fois par Galilée et par Cavalieri, vint de son côté à bout du problème en 1643, et inséra sans prétentions la solution qu'il avait trouvée à la suite de ses œuvres.

Cette publication fit jeter les haut cris à Roberval, qui imagina toutes sortes de mauvaises raisons pour prouver que Galilée et Torricelli avaient dû connaître la solution qu'il avait donnée, sans, du reste, aucune démonstration. Torricelli répondit « qu'il importait peu que le problème de la *cycloïde* eût pris naissance en France ou en Italie; qu'à la mort de Galilée (1642) on ne connaissait pas encore en Italie la mesure de l'aire de cette courbe; qu'il avait trouvé seul les démonstrations qu'on lui contestait, et qu'il s'inquiétait peu qu'on le crût ou qu'on ne le crût

pas, parce que ce qu'il disait était conforme au témoignage de sa conscience. »

Le P. Mersenne avait fait part à Descartes, en 1638, de la découverte de Roberval, sans lui envoyer la démonstration, comme du reste c'était l'usage général à l'époque. Descartes renvoya aussitôt à Mersenne un précis de démonstration, et eut le tort d'ajouter « qu'il n'étoit personne médiocrement versé en géométrie qui ne fût en état de trouver ce dont Roberval se faisoit tant d'honneur. » Ce fut un nouveau sujet de querelles : Roberval, sans oser prendre envers Descartes le ton d'un pédagogue, ne put cependant retenir quelques insinuations malveillantes; Descartes répondit en proposant à son adversaire le problème de la tangente à la *cycloïde*, problème que Fermat résolut, mais que Roberval manqua d'abord entièrement; il le résolut plus tard par sa méthode des mouvements composés. L'élégante solution de Descartes est devenue la base d'une nouvelle théorie générale de Géométrie.

Après les problèmes de l'aire et de la tangente à la *cycloïde*, les premiers qui devaient se présenter à l'esprit concernaient les volumes engendrés par la révolution de la courbe tournant autour de sa base ou de son axe. Ce fut encore Roberval qui les résolut vers 1644.

La théorie de la *cycloïde* ne fit plus aucun progrès jusqu'en 1658, époque à laquelle Pascal, sous le nom de Dettonville, porta son fameux défi à tous les géomètres de l'Europe. Pascal proposait de déterminer la longueur d'un arc quelconque de la courbe, et son centre de gravité; les aires des surfaces que cet arc engendre en tournant autour de l'axe ou autour de la base, et leurs centres de gravité; l'aire d'un segment intercepté dans la

cycloïde par une ordonnée quelconque, et son centre de gravité; enfin les volumes engendrés par ce segment autour de l'axe ou de la base, et leurs centres de gravité.

Huyghens, Fermat et Wren résolurent séparément quelques-unes des questions proposées et envoyèrent leurs solutions, sans toutefois prétendre au prix proposé. Huyghens avait quarré un segment particulier; Wren avait déterminé la longueur d'un arc quelconque et son centre de gravité; Fermat avait obtenu l'aire engendrée par un arc de la courbe, ce qui suppose qu'il avait aussi trouvé la longueur de l'arc lui-même.

Mais les deux seuls concurrents qui prétendirent au prix furent le P. La Louère, jésuite, qui était bien inférieur aux difficultés proposées, et Wallis qui, pressé par le temps, avait commis plusieurs fautes. Pascal publia ses solutions dans la *Lettre de A. Dettonville à M. de Carcavi* et les petits traités explicatifs qui y sont joints. Peu après, Wallis donna lui-même ses solutions corrigées.

La *cycloïde* reparaîtra avec éclat dans la période suivante, lorsque Huyghens, cherchant à écarter les petites inégalités que doivent nécessairement présenter les oscillations d'un pendule circulaire, se proposera de déterminer la courbe sur laquelle il faudrait faire rouler un corps pour qu'il mît toujours le même temps à arriver au point le plus bas, quel que fût celui d'où on l'eût abandonné, et trouva que cette courbe était la *cycloïde*. Pour réaliser son pendule idéal, Huyghens avait à déterminer un mode de suspension tout nouveau; les recherches qu'il fit à ce sujet le conduisirent à sa théorie des développées, et l'histoire de la *cycloïde* s'enrichit de la découverte de cette remarquable propriété dont elle jouit, d'avoir sa développée égale à elle-même;

les développements relatifs à cette découverte se verront dans la période suivante.

Enfin il sera de nouveau question de la cycloïde, lors de la naissance du *calcul des variations*, et, cette fois encore, elle se fera remarquer par une propriété exceptionnelle, celle d'offrir à un corps pesant le chemin le plus rapide pour parvenir d'un point à un autre.





BIOGRAPHIE

DES

SAVANTS DE LA NEUVIÈME PERIODE

ET

ANALYSE DE LEURS TRAVAUX.

CAVALIERI (BONAVENTURE).

(Né à Milan en 1598, mort en 1647.)

Il fut un des bons élèves de Galilée et professa les Mathéma tiques à Bologne. Tourmenté par de cruelles douleurs physiques, il se plongea avec énergie dans l'étude, pour y trouver une diversion à ses souffrances. Il découvrit, en 1629, la méthode géométrique à laquelle il doit sa célébrité (la *méthode des indivisibles*), et dont Roberval voulut en vain s'attribuer l'honneur. Dans cette méthode, le savant italien « imagine, dit Montucla, le continu comme composé d'un nombre infini de parties qui sont ses derniers éléments ou les derniers termes de la décomposition qu'on peut en faire. Ce sont ces derniers éléments qu'il appelle indivisibles, et c'est dans le rapport suivant lequel ils croissent ou décroissent, qu'il cherche la mesure des figures ou leurs rapports entre elles. » M. Chasles, jugeant la théorie des indivisibles, dit : « Cette méthode, propre principalement à la

détermination des aires, des volumes, des centres de gravité des corps, et qui a suppléé avec avantage, pendant cinquante ans, au calcul intégral, n'était, comme le fait voir Cavalieri lui-même, qu'une application heureuse ou plutôt une transformation de la méthode d'exhaustion. » Cavalieri a exposé les éléments de sa théorie dans le plus important de ses ouvrages: *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (Bologne, 1635, in-4°); il l'a ensuite considérablement enrichie dans ses *Exercitationes geometricæ sex* (Bologne, 1647). On lui doit en outre : *Specchio ustorio, ovvero trattato delle settioni coniche* (Bologne, 1632); *Trigonometria plana et sphærica* (Bologne, 1635), etc.

Ce fut Cavalieri qui donna la première démonstration satisfaisante du fameux théorème de Guldin. Ce jésuite, qui avait attaqué Cavalieri sur sa méthode des indivisibles, dut être bien confus lorsque son antagoniste se servit de cette méthode même pour démontrer l'exactitude du théorème qu'il n'était parvenu à établir que par des raisonnements métaphysiques.

La méthode de Cavalieri ne peut conduire qu'à des résultats exacts, mais l'idée primitive en avait été présentée par lui d'une manière très vicieuse. Cavalieri considère les volumes comme formés de surfaces empilées, les surfaces comme composées de lignes juxtaposées, enfin les lignes comme composées de points placés les uns à côté des autres; et c'est en tenant compte à la fois du nombre des éléments qui composent l'objet à mesurer et de leur étendue, qu'il arrive à la mesure de cet objet. Quoique cette conception soit absurde, on peut rétablir la vérité et rendre la rigueur aux raisonnements, en restituant aux indivisibles la dimension dont Cavalieri faisait abstraction. Ses surfaces empilées

ne sont autre chose que des tranches ayant une hauteur commune dont on peut faire abstraction ; ses lignes juxtaposées sont des surfaces trapézoïdales ayant, de même, une hauteur commune, enfin ses points consécutifs sont de petites droites ayant toutes même longueur. Le vice de la méthode, s'il y en a un, ne consistait donc que dans l'inexactitude des expressions employées pour en rendre compte ; les vrais géomètres ne s'y sont pas trompés. Quant à la méthode elle-même, elle réside entièrement dans le procédé de calcul très remarquable que Cavalieri a su imaginer pour la rendre pratique. Quelques exemples sont indispensables pour en rendre compte : supposons qu'il s'agisse de mesurer un parallélogramme, l'indivisible sera une parallèle à la base et le nombre de ces indivisibles sera proportionnel à la hauteur ; par conséquent, on pourra prendre pour mesure du parallélogramme le produit des mesures de sa base et de sa hauteur. De même, s'il s'agit d'un parallélépipède, l'indivisible sera une section parallèle à la base, et le nombre des indivisibles sera proportionnel à la hauteur ; on pourra donc prendre pour mesure du parallélépipède le produit des mesures de sa base et de sa hauteur. Le vice du raisonnement, dans ces deux cas, tient à ce qu'il s'agit des figures les plus élémentaires, dont on demande la mesure absolue ; ce défaut va disparaître lorsqu'il s'agira de comparer les figures plus compliquées à ces deux figures primitives. Supposons qu'on veuille comparer un triangle au parallélogramme de même base et de même hauteur ; on décomposera pour cela les deux figures en éléments, par des parallèles aux bases, équidistantes entre elles : le plus petit élément, dans le triangle, étant 1, le second sera 2, le troisième 3, et le dernier, ou la base, sera n ; la somme sera donc $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ ou

$\frac{n(n+1)}{2}$; au contraire, tous les éléments du parallélogramme seront égaux à n et le nombre en sera n, la somme sera donc n^2; le rapport des deux sommes sera donc :

$$\frac{1}{2}\frac{n^2+n}{n^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right);$$

mais n doit être supposé infini, le rapport exact est donc $\frac{1}{2}$. Comparons de même un tétraèdre au parallélépipède de même base et de même hauteur, et pour cela décomposons-les encore en éléments par des plans parallèles aux bases. Les sections parallèles faites dans une pyramide étant entre elles comme les carrés de leurs distances au sommet, si le plus petit élément est 1, le second sera 2^2, le troisième, 3^2, etc., le dernier ou la base sera n^2, la somme de ces éléments sera donc :

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$$

ou

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

au contraire, tous les éléments du parallélépipède seront égaux à n^2 et le nombre en sera n, la somme sera donc n^3; ainsi le rapport des deux sommes sera

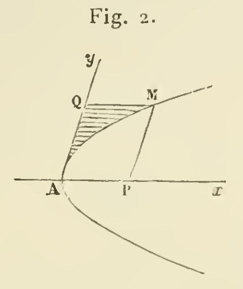
$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3},$$

qui se réduit visiblement à $\frac{1}{3}$, lorsque n est infini.

Supposons que l'on veuille comparer le segment oblique AMQ d'une parabole du second degré, $y^2=2px$, au parallélogramme

AQMP, ayant pour côtés les coordonnées du point M (*fig.* 2) : l'équation de la courbe donnant $x = \frac{y^2}{2p}$, si l'on imagine les

Fig. 2.



parallèles à l'axe des x, menées aux distances $1, 2, \ldots, n$ de cet axe, les longueurs de ces parallèles, comprises entre la courbe et l'axe des y seront :

$$\frac{1}{2p}, \frac{2^2}{2p}, \frac{3^2}{2p}, \ldots, \frac{n^2}{2p};$$

la somme en sera donc

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6.2p};$$

d'un autre côté, les éléments du parallélogramme seront tous égaux à $\frac{n^2}{2p}$; et, comme il y en aura n, la somme en sera $\frac{n^3}{2p}$; le rapport sera donc :

$$\frac{\text{AMQ}}{\text{AQMP}} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{3}.$$

La même méthode s'appliquerait évidemment aussi bien à la quadrature des paraboles de tous les degrés; l'emploi n'en exi-

gerait que la connaissance de la formule qui donne la somme des puissances semblables et entières, mais quelconques, de nombres en progression arithmétique.

Cavalieri, dans ses *Exercitationes mathematicæ sex*, quarre effectivement par cette méthode les paraboles

$$y = \frac{x^3}{a^2}$$

et

$$y = \frac{x^4}{a^3};$$

il donne même la formule de l'aire d'une parabole de degré quelconque

$$y = \frac{x^m}{a^{m-1}},$$

mais il n'y arrive que par analogie.

La même méthode fournirait aussi aisément la cubature des paraboloïdes de révolution, car, si la parabole méridienne est

$$y = \frac{x^n}{a^{n-1}},$$

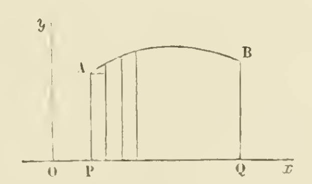
l'élément du volume engendré sera $\pi \frac{x^{2n}}{a^{2n-2}}$, en ne tenant pas compte de la hauteur commune.

Cette méthode serait impuissante à donner l'aire du cercle, parce qu'elle exigerait la sommation d'une suite de sinus d'arcs dont les cosinus seraient en progression arithmétique; mais, la valeur de π étant supposée connue, elle fournira les mesures des surfaces ou des volumes d'un cylindre ou d'un cône.

Pour appliquer la méthode à la recherche de la mesure de la

surface engendrée par la révolution d'une courbe AB (*fig.* 3) tournant autour d'un axe Ox situé dans son plan, il faudrait calculer la somme des produits de ses ordonnées par les éléments dans lesquels elles décomposent la courbe; de même, pour évaluer le volume engendré par la révolution du segment PABQ, il suffirait d'évaluer la somme des carrés des ordonnées équidistantes de la courbe AB. Les démonstrations des deux parties du théorème de Guldin se tirent de ces considérations.

Fig. 3.



Cavalieri était entré fort jeune dans l'ordre des Jésuates ou Hyéronimites. L'intelligence dont il avait fait preuve engagea ses supérieurs à l'envoyer à Pise pour y suivre les cours de l'Université. C'est là qu'il apprit les éléments de la Géométrie, avec l'aide et par les conseils de Benoît Castelli, disciple et ami de Galilée.

Il paraît avoir été en possession de sa méthode des indivisibles dès 1629, car il s'en fit, cette année-là même, une recommandation près des savants et des magistrats de Bologne, pour obtenir la chaire que l'astronome Magini venait d'y laisser vacante. Il obtint en effet cette chaire vers la fin de 1629.

Il nous reste à faire connaître l'ouvrage même de Cavalieri; cela est d'autant plus nécessaire que, pour abréger, nous avons,

dans l'exposition de sa méthode, supposé les procédés à peu près tels qu'ils sont devenus plus tard, par suite des efforts successifs de Roberval, de Wallis et de Pascal. Mais on verra que ceux qu'emploie Cavalieri sont bien plus primitifs; le calcul y a une part beaucoup moindre. Au reste, il y a lieu de distinguer à cet égard : les *Exercitationes geometricæ sex* se composent en effet de parties qui ne sont pas de même facture : dans les premières, Cavalieri reproduit simplement ce qui avait trait à la théorie des indivisibles dans sa *Géométrie* imprimée en 1635; ces premières parties sont bien son œuvre propre et assurent sés droits à l'invention de la méthode; mais Cavalieri convient lui-même que, pour les suivantes, où le calcul commence à intervenir, il a profité de l'aide de Beaugrand.

Les deux premières parties, l'*Exercitatio prima* et l'*Exercitatio secunda* sont intitulées *De priori methodo indivisibilium* et *De posteriori methodo indivisibilium.* Nous croyons devoir, pour les faire connaître, reproduire en l'abrégeant la préface dans laquelle l'auteur en fait lui-même l'analyse.

« Il y a environ dix ans, dit-il, que parut ma *Géométrie* en sept livres, élevée sur de nouvelles bases et où la considération des indivisibles fournissait le principal instrument pour arriver à la comparaison des grandeurs des figures tant planes que solides.

« J'ai institué deux voies pour atteindre ce but. La première est exposée dans les six premiers livres de cette *Géométrie*, et la seconde dans le septième.

« Dans l'une et l'autre méthode apparaissent, lorsqu'il s'agit de la mesure des figures planes, des lignes parallèles en nombre indéfini, comprises entre celles qui touchent la figure; lorsqu'il

s'agit de la mesure des solides, ces lignes sont remplacées par des plans parallèles équidistants, compris de même entre ceux qui touchent la figure à ses deux extrémités.

« Il est donc manifeste que nous considérons les figures planes comme formées (*contextæ*) de fils parallèles, à l'instar des toiles, et les solides comme composés de feuilles, de même que les livres.

« Mais tandis que, dans les toiles, les fils, et, dans les livres, les feuilles sont en nombre fini, parce qu'il s'y trouve une certaine épaisseur, pour nous le nombre en est indéfini. parce que nous les considérons comme sans épaisseur. Cependant nous ne faisons pas usage de cette hypothèse sans y apporter quelque attention, car, dans la première méthode, nous considérons la somme totale des files et, dans la seconde, leur distribution.

« Soient deux figures planes, comprises entre les mêmes droites parallèles, et une infinité de parallèles à ces deux droites, terminées séparément aux contours des deux figures, nous pouvons comparer de deux manières les segments interceptés sur ces droites dans les deux figures : soit en mettant en rapport la somme des uns et la somme des autres, soit en comparant séparément l'un à l'autre les deux segments interceptés sur chaque droite. Il en sera de même s'il s'agit de deux solides compris entre les mêmes plans parallèles, pourvu qu'on substitue les sections planes de ces solides aux lignes droites considérées précédemment. Ce sont ces deux manières d'établir la comparaison qui distinguent les deux méthodes l'une de l'autre. (Il convient de remarquer que, si Cavalieri ne répète pas ici expressément que les droites et les plans dont il parle sont équidistants entre eux, il

l'a du moins dit une fois pour toutes.) Au reste chacune des méthodes conduit à une règle générale qui lui est propre pour la comparaison des grandeurs des figures.

« Celle que fournit la première méthode est la suivante : si, dans deux figures planes, même de hauteurs différentes (Cavalieri entend par là comprendre dans son énoncé le cas où, l'une des figures manquant dans un certain intervalle, les sections, dans cet intervalle, seraient nulles), les sommes des segments séparément interceptés sur les parallèles sont égales, les figures seront aussi égales (équivalentes) et réciproquement; sinon non. Plus généralement la raison des deux sommes de segments sera celle des deux figures; et de même pour les solides.

« Le règle fournie par la seconde méthode est un peu plus étroite : Si deux figures planes, comprises entre les mêmes parallèles, interceptent des segments égaux chacun à chacun, sur les droites parallèles aux bases, les figures seront égales; plus généralement, si les deux segments interceptés sur une même droite, dans les deux figures, ont une raison constante, cette raison sera celle des deux figures; et de même pour les solides. »

Cavalieri développe en un grand nombre de pages les démonstrations de ces principes évidents pour nous, mais qui ne laissèrent pas d'exciter, de son temps, les plus violentes critiques, comme on le voit par l'exemple de Guldin.

Nous passons ces explications inutiles aujourd'hui, mais nous devons insister sur l'importante acquisition du théorème à l'aide duquel Cavalieri obtient, par exemple, les cubatures de la pyramide et du cône, et la quadrature de la parabole du second degré. La manière même dont il y parvient est si originale qu'elle attire forcément l'attention.

Cavalieri ne connaît pas la formule

$$\Sigma_1^n n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

que donne Aryabhata, mais qui n'avait pas passé en Occident. S'il la connaissait, il en déduirait immédiatement

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Sigma_1^n n^2}{n \cdot n^2} = \frac{2n^3}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

Voici comment il parvient à ce résultat : il considère un rectangle, divisé en deux triangles par une de ses diagonales, et il conçoit à travers le rectangle et l'un des triangles une infinité de parallèles à la base du rectangle, équidistantes entre elles. Les segments de ces droites compris dans le rectangle sont égaux entre eux, tandis que ceux qui sont interceptés par les côtés du triangle sont comme $1, 2, 3, \ldots n$. Sur chacun des segments compris dans le rectangle ou dans le triangle, il construit des carrés élevés dans des plans perpendiculaires à celui de la figure. Les carrés construits sur les segments interceptés par le rectangle sont égaux entre eux et égaux au carré construit sur la base du rectangle, représentée par n, la somme de ces carrés est donc

$$n \cdot n^2 :$$

d'autre part, les carrés construits sur les segments interceptés dans le triangle sont représentés par

$$1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2,$$

qui sont les nombres dont on cherche la somme. Mais les carrés construits sur les segments interceptés dans le rectangle forment les feuilles d'un parallélépipède rectangle dont la base carrée est élevée sur la base du rectangle et dont la hauteur est celle de ce

rectangle; et les carrés construits sur les segments interceptés dans le triangle forment les feuilles d'une pyramide quadrangulaire dont la base est aussi le carré élevé sur la base du rectangle et dont la hauteur est celle de ce même rectangle. Mais la pyramide ayant même base et même hauteur que le parallélépipède en est le *tiers*. Donc

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Sigma_1^n n^2}{n . n^2} = \frac{1}{3}.$$

Voici comment Cavalieri énonce son théorème : « *Exposito parallelogrammo quocumque, in eo que ducta diametro* (il fait encore *diameter* féminin, comme Halley); *omnia quadrata parallelogrammi ad omnia quadrata cujusvis triangulorum per dictam diametrum constitutorum erunt in ratione tripla, uno laterum parallelogrammi communi regula existente.* On ne sera pas étonné, je crois, si je dis que j'ai dû relire plusieurs fois ce *rébus* avant d'en deviner le sens. Quant à la démonstration, qui n'est pas plus claire que l'énoncé, je l'ai peut-être un peu brusquée en supposant admis que la pyramide fût le tiers du parallélépipède, mais j'ai cru comprendre que Cavalieri se servait de ce théorème connu pour établir la proposition qu'il avait en vue, sauf à se servir ensuite de cette proposition spéciale pour vérifier que la théorie des indivisibles fournissait bien les mesures des volumes d'une pyramide quelconque et d'un cône quelconque.

L'important est que les considérations géométriques employées par Cavalieri conduisent bien rigoureusement à la démonstration de la formule

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Sigma_1^n n^2}{n . n^2} = \frac{1}{3}.$$

Il ne nous reste, pour compléter l'analyse des *Exercitationes prima et secunda*, qu'à reproduire les énoncés des principaux théorèmes auxquels l'auteur parvient par application de ses deux méthodes. Les voici :

Deux parallélogrammes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs ; parce que les nombres des *fils* équidistants parallèles aux bases, contenus dans ces deux rectangles, sont entre eux comme les hauteurs.

L'une des diagonales d'un parallélogramme le décompose en deux triangles qui en sont la moitié, parce que les sommes des fils parallèles à la base compris dans le parallélogramme et dans le triangle sont doubles l'une de l'autre.

Deux pyramides de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalentes (Cavalieri dit égales).

Si deux trapèzes de même hauteur, ont aussi leurs bases parallèles respectivement égales, ces trapèzes seront égaux.

Un cylindre est le triple du cône de même base et de même hauteur.

Le parallélogramme ayant pour base celle d'un segment de parabole, dont les côtés élevés aux extrémités de la base sont parallèles au diamètre qui, dans la parabole, est conjugué de la base, et dont le dernier côté est tangent à la parabole, a avec le segment une raison sesquialtère.

Deux cylindres de même hauteur, à bases curvilignes quelconques, sont égaux lorsque les bases sont équivalentes (littéralement lorsque les bases fournissent les mêmes sommes de fils parallèles, équidistants), etc.

Nous passons la *tertia Exercitatio, in qua discutiuntur ea quæ a Paulo Guldino è Societate Jesu in ejusdem Centrobaryca*

præfatæ Geometriæ Indivisibilium objiciuntur. Nous n'y trouvons rien autre chose que les preuves que Guldin n'avait pas compris les principes qu'il attaquait, et la démonstration de son théorème par la méthode des indivisibles.

La *quarta Exercitatio* a une plus grande importance, parce qu'on y trouve en substance la démonstration de la règle

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Sigma^n n^m}{n \cdot n^m} = \frac{1}{m+1}.$$

La préface de cette partie de l'ouvrage est assez intéressante pour que nous la reproduisions en abrégé.

« Parmi les problèmes proposés par le très subtil Képler, dans sa *Stereometria doliorum*, les plus fameux concernent la mesure des fuseaux paraboliques et hyperboliques. Comme je m'occupais de rechercher les mesures de ces solides, il arriva qu'en fouillant le sol du champ géométrique, je tombai, outre la solution des problèmes proposés, sur un trésor d'un prix bien plus grand à mes yeux. En effet, tandis que je retournais dans mon esprit la question du fuseau parabolique, je m'aperçus qu'on pourrait en avoir la mesure si l'on pouvait connaître la raison de la somme des quarrés-quarrés des fils composant un parallélogramme quelconque à la somme des quarrés-quarrés des parties de ces fils, interceptées dans l'un des triangles séparés dans le parallélogramme par une de ses diagonales.

« Cherchant donc à découvrir cette raison, je la trouvai quintuple. Rapprochant alors ce résultat de ceux que j'avais établis dans ma *Géométrie* relativement à la raison des sommes simples des mêmes lignes, laquelle est deux, et à la raison des sommes de leurs quarrés, qui est trois; afin que l'intervalle compris entre

le cas des quarrés et celui des quarrés-quarrés ne restât pas vide, je m'appliquai aussi à rechercher la raison de la somme des cubes des fils contenus dans le parallélogramme à la somme des cubes de leurs parties interceptées dans le triangle, et je la trouvai quadruple. De sorte que j'entrevis avec admiration cette loi que le rapport des sommes des lignes simples était deux; celui des sommes de leurs quarrés, trois; celui des sommes de leurs cubes, quatre; celui des sommes des quarrés-quarrés, cinq; d'où j'inférais que, pour les quarrés-cubes, la raison serait six; pour les cubo-cubes, sept; et ainsi de suite, suivant l'ordre naturel des nombres commençant par l'unité.

« Ce trésor, je l'ai découvert le premier, que je sache, à l'occasion de la mesure du fuseau parabolique et l'ai mis au jour (*patefeci*) avant 1640, dans le dernier de ma centurie de problèmes géométriques.

« Il en résulte immédiatement la quadrature de toutes les paraboles, linéaire, quadratique, cubique, etc., ainsi que beaucoup d'autres choses admirables.

« Le père Niceron vint ici vers le temps où j'étais tombé sur ces propositions; je l'en instruisis et il lui plut, à son retour à Paris, de proposer à l'illustre J. de Beaugrand, que je connaissais déjà, la démonstration de ma susdite proportion et de la mesure du fuseau parabolique.

« Entraîné à d'autres recherches, je ne pensais plus à celles-là, lorsque dernièrement je fus averti, par une lettre du très savant Mersenne, que Beaugrand était mort, et, en même temps, je reçus les démonstrations qu'il avait recherchées à l'instigation de Niceron.

« Je m'affligeai beaucoup de la perte d'un homme aussi ingé-

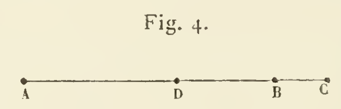
nieux que le montraient les démonstrations qui m'avaient été envoyées.

« Mais, comme il m'avait devancé dans ce travail, j'y pensai encore moins.

« Cependant, après un temps assez long, tendant de nouveau mon esprit de ce côté, je m'aperçus que la théorie contenue dans le second livre de ma *Géométrie des Indivisibles,* relativement aux sommes des lignes simples et aux sommes de leurs quarrés, pouvait être étendue à toutes les autres puissances.

« Mettant donc la main au travail, je me suis étudié à établir

Fig. 4.



du mieux que j'ai pu les propositions suivantes, parmi lesquelles j'ai eu soin d'insérer fidèlement les choses inventées par Beaugrand, afin qu'elles ne périssent pas et pour n'en pas priver le lecteur. »

Cavalieri commence par des propositions peu intéressantes que nous ne citons pas.

Il donne ensuite la composition du quarré, du cube et du quarré-quarré d'une ligne divisée en deux parties inégales. Il ne va pas au delà parce que, dit-il, cela lui suffit et qu'on pourra continuer si on le veut.

Il entre ensuite dans la théorie qu'il veut édifier, en recherchant les expressions des sommes de puissances semblables des parties inégales d'une ligne, en fonction de la demi-somme de ces parties et de leur demi-différence.

Soit la ligne AB (*fig.* 4) divisée en deux parties égales au

point D et en deux parties inégales au point B :

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\,\overline{AD}^2 + 2\,\overline{DB}^2,$$

$$\overline{AB}^3 + \overline{BC}^3 = 2\,\overline{AD}^3 + 6\,AD.\overline{DB}^2,$$

$$\overline{AB}^4 + \overline{BC}^4 = 2\,\overline{AD}^4 + 2\,\overline{DB}^4 + 12\,\overline{AD}^2.\overline{DB}^2;$$

on vérifiera aisément ces égalités en les écrivant sous la forme

$$a^2 + b^2 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

$$a^3 + b^3 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + 6\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

$$a^4 + b^4 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^4 + 12\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Cavalieri ne va pas au delà, mais on peut, dit-il, continuer si on le veut.

Ces propositions tendent admirablement au but proposé : en

Fig. 5.

effet, soient ABCD (*fig.* 5) un parallélogramme quelconque, divisé en deux triangles égaux par la diagonale BD; EHF la parallèle aux côtés AD et BC, menée par les milieux de AB et DC, laquelle divise en parties égales en H une parallèle quelconque

MHNP à la base, tandis que cette parallèle est divisée en parties inégales au point N par la diagonale; enfin soient IGK le diamètre du parallélogramme parallèle à ses bases DC et AB et M′N′H′P′ une seconde parallèle à la base, aussi éloignée de DC que MNHP l'est de AB.

Considérons maintenant, par exemple, les sommes des quarrés-quarrés des lignes, équidistantes entre elles et en nombre n, comprises dans le parallélogramme et dans l'un des triangles, DCB si l'on veut.

La première somme est

$$n\overline{\mathrm{DC}}^4;$$

quant à la seconde, nous la désignerons par

$$\Sigma_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}}\overline{\mathrm{NP}}^4,$$

ou par

$$\Sigma_{\mathrm{B}}^{\mathrm{K}}(\overline{\mathrm{NP}}^4+\overline{\mathrm{MN}}^4),$$

en remplaçant les quarrés-quarrés des lignes telles que N′P′, placées au-dessous de IK, par les quarrés-quarrés des lignes telles que MN, placées au-dessus de la même ligne IK.

Mais, d'après l'un des théorèmes précédents,

$$\overline{\mathrm{NP}}^4+\overline{\mathrm{MN}}^4=2\overline{\mathrm{MH}}^4+2\overline{\mathrm{HN}}^4+12\overline{\mathrm{MH}}^2.\overline{\mathrm{HN}}^2;$$

donc

$$\Sigma_{\mathrm{B}}^{\mathrm{K}}(\overline{\mathrm{NP}}^4+\overline{\mathrm{MN}}^4)=2\frac{n}{2}\overline{\mathrm{MH}}^4+2\Sigma_{\mathrm{B}}^{\mathrm{K}}\overline{\mathrm{HN}}^4+12\overline{\mathrm{MH}}^2\Sigma_{\mathrm{B}}^{\mathrm{K}}\overline{\mathrm{HN}}^2$$

$$=\overline{\mathrm{MH}}^4+2\Sigma_{\mathrm{B}}^{\mathrm{K}}\overline{\mathrm{HN}}^4+12\overline{\mathrm{MH}}^2\Sigma_{\mathrm{B}}^{\mathrm{K}}\overline{\mathrm{HN}}^2,$$

puisqu'il ne faut compter que $\frac{n}{2}$ sommes telles que $\overline{\mathrm{NP}}^4+\overline{\mathrm{MN}}^4$.

Cela posé, d'après la proposition relative à la somme des

quarrés simples des lignes parallèles à la base d'un triangle, et équidistantes entre elles, comparée à la somme des quarrés des lignes interceptés sur les mêmes droites, entre les côtés du parallélogramme double,

$$\Sigma_B^K \overline{HN}^2 = \frac{1}{3} \Sigma_B^K \overline{FB}^2 = \frac{1}{3} \frac{n}{2} \overline{MH}^2,$$

puisqu'il ne se trouve que $\frac{n}{2}$ parallèles à la base, entre BF et KG.

En remplaçant $\Sigma_B^K \overline{HN}^2$ par sa valeur, dans l'expression de la somme des quarrés-quarrés des parallèles à la base contenues dans le triangle BCD, il vient, pour cette somme, l'expression

$$\Sigma_B^C \overline{NP}^4 = n \overline{MH}^4 + 2n \overline{MH}^4 + 2 \Sigma_B^K \overline{HN}^4$$

ou, en réduisant,

$$\Sigma_B^C \overline{NP}^4 = 3n \overline{MH}^4 + 2 \Sigma_B^K \overline{HN}^4.$$

Mais la somme $\Sigma_B^K \overline{HN}^4$, qui se rapporte au triangle FGB, est composée, par rapport à la base FB de ce triangle, comme la somme $\Sigma_B^C \overline{NP}^4$ relative au triangle BDC l'était par rapport à la base DC de ce triangle; de sorte que, d'une part, FB étant la moitié de DC, et, d'ailleurs, le nombre des divisions comprises sur GF étant aussi la moitié du nombre des divisions contenues sur BC,

$$\Sigma_B^K \overline{HN}^4 = \frac{1}{2} \frac{1}{16} \Sigma_B^C \overline{NP}^4 = \frac{1}{32} \Sigma_B^C \overline{NP}^4;$$

en remplaçant $\Sigma_B^K \overline{HN}^4$ par cette valeur, il vient

$$\Sigma_B^C \overline{NP}^4 = 3n \overline{MH}^4 + \frac{1}{16} \Sigma_B^C \overline{NP}^4$$

d'où

$$\frac{15}{16}\Sigma_B^C \overline{NP}^4 = 3n\,\overline{MH}^4 = 3n\,\frac{\overline{DC}^4}{16},$$

d'où, enfin, ce qu'il fallait démontrer,

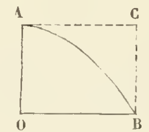
$$\Sigma_B^C \overline{NP}^4 = \frac{1}{5}\,n\,\overline{DC}^4;$$

ou bien

$$\frac{\Sigma_B^C \overline{NP}^4}{n\,\overline{DC}^4} = \frac{1}{5}.$$

Cavalieri démontre ensuite que, si un demi-segment droit de parabole, tel que AOB (*fig.* 6), tourne autour de son axe AO, le

Fig. 6.



volume qu'il engendrera sera les $\frac{8}{15}$ de celui qu'engendrerait le rectangle AOBC; l'évaluation de ce rapport avait été proposé par Képler.

La *Quarta Exercitatio* se termine par la note de Beaugrand. Nous donnons seulement les énoncés de deux des questions qui y sont traitées; on verra qu'en reproduisant cette note, Cavalieri a poussé l'honnêteté aussi loin que possible, car la méthode indiquée par Beaugrand diffère bien peu de la sienne.

1° Étant donnée une ligne divisée en deux parties égales et en

deux parties inégales, trouver la composition de la somme des puissances semblables quelconques des deux parties inégales.

Beaugrand étend sa formule jusqu'aux cubocubocubes.

2° Si un parallélogramme est divisé en deux triangles par une de ses diagonales, la somme des quadratocubes des lignes équidistantes, en nombre infini, menées dans le parallélogramme, parallèlement à sa base, sera sextuple de la somme des quadratocubes des parties de ces lignes interceptées dans le triangle.

Beaugrand étend ensuite le théorème jusqu'aux cubocubocubes, et termine par la solution du problème de Képler.

Nous croyons que Beaugrand n'est pas l'auteur de ces propositions, et que sa note lui aura été faite soit par Roberval ou Fermat, soit, plutôt, par Pascal.

Cavalieri, dans sa *Quinta Exercitatio*, traite la question, imaginée à plaisir, de trouver le centre de gravité d'un corps dont la densité croîtrait proportionnellement à la distance à un plan fixe. Il dit que cela est permis et le prouve par diverses raisons tirées des exemples laissés par les anciens : Archimède, qui s'est occupé de la spirale, quoiqu'il n'y ait peut-être pas dans la nature une seule spirale d'Archimède; les Grecs qui ont cherché la quadrature exacte du cercle, la trisection de l'angle, etc., quoique ces questions n'eussent pas d'utilité pratique ; enfin Galilée et Torricelli qui ont étudié un mouvement défini d'imagination, quel que pût être celui qui se produit dans la nature (remarque assez extraordinaire de la part d'un disciple de Galilée). Il ajoute : c'est ainsi que les rhéteurs, pour s'exercer, traitent une cause feinte, afin d'être plus habiles dans les causes véritables.

Je fais cette citation pour montrer que Cavalieri n'entrevoyait aucune utilité pratique à la recherche qu'il entreprenait; je n'en

vois pas davantage lorsqu'il s'agit de corps solides, mais, pour les surfaces planes, dont s'occupe particulièrement Cavalieri, c'est différent.

Le centre de gravité d'une surface plane, dont la densité croît proportionnellement à la distance à une droite à laquelle elle se termine d'un côté, n'est autre que celui du solide homogène que l'on obtiendrait en coupant le cylindre droit indéfini qui aurait pour base la surface considérée, par deux plans symétriques par rapport à ce plan de base et passant par la droite où la densité de la surface est nulle. La considération de ces troncs de cylindres a été très utile à Pascal, qui les appelle *onglets*, et à Huyghens, qui les nomme *coins*. La théorie de Cavalieri a peut-être facilité les recherches de ces deux géomètres.

La *sexta Exercitatio* est intitulée *De propositionibus miscellaneis*. Il y est question d'abord de la construction des coniques, ensuite de la recherche des foyers des lentilles, puis de problèmes n'ayant aucun lien entre eux.

L'analyse de ses ouvrages montrera, je pense, que Cavalieri méritait d'être connu ; mais, s'il l'est si peu, je crois pouvoir dire que ce fut bien sa faute. Si, en effet, l'on donnait des prix d'obscurité, il aurait dû, à mon avis, emporter sans conteste le premier. On ne peut absolument pas le lire ; on en est constamment réduit à le deviner. Il est poète, sans doute, mais dans le sens *vates*. C'est assurément pour un de ses congénères que Voltaire a inventé le néologisme *inlisable*.



LA LOUÈRE (ANTOINE DE).

(Né en Languedoc en 1600, mort à Toulouse en 1664.)

Il entra dans l'ordre des Jésuites et professa successivement la Rhétorique, la Théologie, l'hébreu et les Mathématiques. La Louère est surtout connu par ses démêlés avec Pascal relativement à la cycloïde Il avait déjà publié, en 1651, ses *Elementa tetragonomisca sive quadratura circuli et hyberbolæ segmentorum ex datis ipsorum centris gravitatis*, qui contiennent de bonnes choses.

Il prit part au concours proposé par Pascal en 1658, et résolut un des problèmes indiqués dans le programme; le plus simple, à la vérité. Pascal découvrit une erreur de calcul dans le manuscrit de La Louère, et, saisissant l'occasion qui lui était offerte de frapper sur un membre de la célèbre Compagnie, il maltraita fort le pauvre père, le tourna en ridicule de toutes les manières, et le poursuivit jusque dans ses *Provinciales*.

La Louère n'avait évidemment pas assez fait pour gagner le prix, mais peut-être était-il bien dur de lui faire regretter jusqu'à ses efforts. A l'issue du concours, La Louère publia la solution du problème qu'il avait pu aborder, et y joignit ce qu'il avait pu apprendre depuis, relativement aux autres, dans un ouvrage intitulé : *Geometria promota in septem de cycloïde libris;* on y trouve l'énoncé et la solution, dans un cas particulier, d'une question intéressante relative à l'aire de la courbe tracée avec un compas sur un cylindre de révolution.

Mais cette question avait été traitée auparavant par Roberval.

Pascal accuse La Louère d'avoir usé de toutes sortes d'artifices malhonnêtes pour arriver à s'attribuer la gloire d'avoir résolu

les problèmes relatifs à la cycloïde. Mais il faudrait supposer à La Louère bien peu d'intelligence pour admettre qu'il ait cru pouvoir réussir dans un pareil projet, par un procédé aussi niais que celui que Pascal lui prête, et qui consistait à attendre la publication des solutions à la date fixée dans le défi, pour venir dire que c'étaient justement celles auxquelles il était parvenu.



FERMAT (PIERRE DE).

(Né à Beaumont de Lomagne, près Montauban en 1601, mort à Paris en 1655.)

Sa vie, entièrement vouée à l'étude, offre peu d'incidents remarquables. Son père était marchand de cuirs; il étudia le droit à Toulouse et devint conseiller au Parlement (1631).

Au milieu des devoirs de sa charge, il sut se créer des occupations littéraires : composer des vers français, latins, italiens, espagnols; cultiver l'érudition grecque et se livrer aux Mathématiques avec de tels succès, qu'il marcha de pair avec les plus habiles géomètres de son temps : Descartes, Cavalieri, Roberval, Wallis, Pascal.

Pascal le nomme *le premier homme du monde* et avoue qu'il ne peut pas toujours le suivre dans ses recherches. « Cherchez ailleurs, lui écrivait-il, qui vous suive dans vos inventions numériques; pour moi, je vous confesse que cela me passe de bien loin; je ne suis capable que de les admirer. » Beaucoup de théorèmes sur les nombres, découverts par Fermat, ont en effet épuisé les efforts de toutes les générations suivantes, sans qu'on ait encore pu les démontrer.

Soit que la Géométrie fût alors considérée plutôt comme un exercice de l'esprit que comme une Science utile, soit insouciance naturelle, Fermat prenait rarement le soin de publier ses découvertes, et même d'en écrire les démonstrations. Il en résulte qu'un grand nombre de ses travaux ont été perdus et que d'autres sont dispersés dans une correspondance qui attend encore un éditeur.

D'Alembert, Lagrange et Laplace font honneur à Fermat de la première idée du calcul différentiel :

« On doit à Fermat, dit d'Alembert, la première application du calcul aux quantités différentielles pour trouver les tangentes. La Géométrie nouvelle n'est que cette dernière méthode généralisée. »

Lagrange dit dans ses leçons sur le calcul des fonctions : « On peut regarder Fermat comme l'inventeur des nouveaux calculs. » Il justifie ailleurs son opinion de la manière suivante :

« Dans sa méthode *De maximis et minimis*, il égale l'expression de la quantité dont on recherche le maximum ou le minimum à l'expression de la même quantité dans laquelle l'inconnue est augmentée d'une quantité indéterminée. Il fait disparaître dans cette équation les radicaux et les fractions, s'il y en a, et, après avoir effacé les termes communs dans les deux membres, il divise tous les autres par la quantité indéterminée qui se trouve les multiplier; ensuite il fait cette quantité nulle, et il a une équation qui sert à déterminer l'inconnue de la question. Or, il est facile de voir au premier coup d'œil que la règle déduite du calcul différentiel, qui consiste à égaler à zéro la différentielle de l'expression qu'on veut rendre maximum ou minimum, prise en faisant varier l'inconnue de cette expression, donne le même résultat, parce que le fond est

le même, et que les termes qu'on néglige comme infiniment petits, dans le calcul différentiel, sont ceux qu'on doit supprimer comme nuls dans le procédé de Fermat. Sa méthode des tangentes dépend du même principe. Dans l'équation entre l'abscisse et l'ordonnée, qu'il appelle la propriété spécifique de la courbe, il augmente ou diminue l'abscisse d'une quantité indéterminée, et il regarde la nouvelle ordonnée comme appartenant à la fois à la courbe et à la tangente, ce qui fournit une équation qu'il traite comme celle d'un cas de maximum ou de minimum. On voit encore ici l'analogie de la méthode de Fermat avec celle du calcul différentiel; car la quantité indéterminée dont on augmente l'abscisse répond à la différentielle de celle-ci, et l'augmentation correspondante de l'ordonnée répond à la différentielle de cette dernière. Il est même remarquable que, dans l'écrit qui contient la découverte du calcul différentiel, sous le titre : *Nova methodus pro maximis et minimis*, Leibniz appelle la différentielle de l'ordonnée une ligne qui soit à l'accroissement arbitraire de l'abscisse comme l'ordonnée à la sous-tangente, ce qui rapproche son analyse de celle de Fermat. » Cette opinion de Lagrange a été reproduite depuis dans des termes non moins formels par Laplace et Fourier.

Des lettres de Fermat, de 1636, prouvent qu'il se servait déjà de la méthode des coordonnées, et l'on sait qu'il quarra les paraboles de tous les degrés, à peu près en même temps que Cavalieri.

Enfin, Laplace pense que Fermat doit partager avec Pascal l'honneur de l'invention du calcul des probabilités. Il aurait ainsi eu part à toutes les grandes découvertes de son époque.

Descartes méconnut d'abord la science profonde de Fermat

et riposta avec aigreur aux objections qu'il avait présentées contre sa *Dioptrique;* mais la paix, fondée sur une estime mutuelle, se rétablit bientôt entre ces deux grands hommes.

Les principaux écrits de Fermat ont été publiés par son neveu, à Toulouse, en 1679, sous le titre : *Varia opera mathematica.* Le gouvernement français avait obtenu des Chambres, en 1843, un crédit pour la réimpression de ses œuvres; mais il ne fut pas donné suite au projet, qui vient d'être repris et sera sans doute réalisé cette fois. M. Brassine a publié à Toulouse, en 1853, un *Précis des œuvres mathématiques de Pierre Fermat.*

Fermat avait laissé une réputation de profond savoir dans les questions de droit, et de sévère intégrité. Il joignait d'ailleurs la plus grande modestie à son immense mérite. Au milieu de ses plus vives discussions scientifiques, il écrivait à Mersenne: « M. Descartes ne saurait m'estimer si peu que je ne m'estime encore moins. »

Nous croyons qu'il y a un peu d'exagération dans les appréciations que nous venons de rapporter : La méthode de Fermat pour les maximums et les minimums, ou plus généralement pour les tangentes, est sans doute meilleure que celle de Descartes, mais c'est Huyghens qui l'a présentée sous une forme pratique, en donnant la valeur du coefficient angulaire de la tangente à la courbe, exprimé par le quotient changé de signe des dérivées, par rapport à l'abscisse et à l'ordonnée, du premier membre de l'équation de cette courbe.

D'un autre côté, c'est Barrow qui, le premier, a songé à exprimer le coefficient angulaire de la tangente à une courbe algébrique, ou transcendante, par le rapport des accroissements infiniment petits de l'ordonnée et de l'abscisse.

Enfin, il y a une distance énorme, d'une part, entre la méthode des maximums de Fermat et celle des développées de Huyghens; de l'autre, entre les procédés sommatoires de Fermat et les procédés d'intégration de Pascal.

Toutefois nous devons faire connaître avec quelques détails la méthode de Fermat pour les quadratures, parce qu'elle est incontestablement supérieure à celle de Cavalieri, beaucoup plus simple et surtout beaucoup moins détournée.

Mais nous ne pouvons nous empêcher auparavant de faire remarquer que, les deux Mémoires de Fermat sur les tangentes et les quadratures n'ayant été publiés qu'en 1679, il est impossible de savoir au juste s'ils n'ont pas été retouchés depuis l'époque où ils furent communiqués d'abord en manuscrits à Descartes, par exemple. Il faudrait pour cela retrouver des copies manuscrites de cette époque et je ne crois pas qu'on en ait.

Sans doute le caractère de Fermat ne permet pas de supposer qu'il ait pu songer à s'attribuer la priorité d'une invention à laquelle il n'aurait pas eu de droits; mais il n'y aurait eu de sa part rien que de très légitime à perfectionner une méthode dont il était l'inventeur, et à en étendre les applications. La question serait donc simplement de savoir si les résultats obtenus par Cavalieri, par Roberval et par Wallis étaient encore inconnus à Fermat lorsqu'il mit pour la dernière fois la main à son *Traité des quadratures*. Quant à la méthode qu'il emploie, nous le répétons, elle lui est bien propre.

M. Brassine affirme que les deux Mémoires de Fermat, dont il s'agit, avaient été écrits avant la publication de la Géométrie de Cavalieri; mais la Géométrie de Cavalieri, où il expose déjà sa méthode, a paru en 1635 : ce sont les *Exercitationes sex* qui ont

été publiés en 1653. Il est bon aussi de remarquer que, lorsqu'il s'agit des ouvrages de Fermat, M. Brassine prend la date supposée de la conception, tandis que, pour ceux de Cavalieri, il prend celle de la publication.

Quoi qu'il en soit, voici la méthode de Fermat: elle est fondée sur deux lemmes que M. Brassine, au reste, énonce tout de travers.

Lemme I.

Si l'on considère dans une progression géométrique décroissante deux termes consécutifs a et aq, il y aura le même rapport entre la différence de ces deux termes, $a - aq$, et le second aq, qu'entre le premier a et la somme de tous ceux qui suivent a, c'est-à-dire qu'on aura la proportion

$$\frac{a - aq}{aq} = \frac{a}{S - a},$$

S désignant la somme de tous les termes à partir de a. En effet

$$S = \frac{a}{1 - q},$$

de sorte que la proportion devient

$$\frac{1 - q}{q} = \frac{1}{\frac{1}{1 - q} - 1} = \frac{1 - q}{q}.$$

Lemme II.

Si l'on considère une progression croissante dont la raison soit $(1 + \alpha)$, la différence entre deux termes consécutifs sera constamment la fraction α du premier des deux.

C'est-à-dire :

$$a(1+\alpha)^m - a(1+\alpha)^{m-1} = a\alpha(1+\alpha)^{m-1},$$

ce qui pouvait être dit avec moins d'appareil.

Voici comment Fermat fait usage de ces deux lemmes pour quarrer les hyperboles et paraboles de tous les degrés : il considère le segment qu'il veut quarrer comme composé d'une infinité de petits rectangles ayant pour bases les différences consécutives d'abscisses croissant en progression géométrique; son second lemme lui donne des expressions simples de ces différences, et le premier lui fournit la somme des petits rectangles.

Ainsi soit à quarrer l'hyperbole

$$y = \frac{m^3}{x^2}$$

à partir de $x = a$. Fermat suppose menées les ordonnées

$$x = a, \quad a(1+\alpha), \quad a(1+\alpha)^2, \quad \ldots :$$

la distance de deux ordonnées consécutives est égale au produit de la première par α de sorte que l'un des petits rectangles a pour mesure

$$y\alpha x \quad \text{ou} \quad \frac{m^3\alpha}{x};$$

c'est-à-dire qu'ils forment une progression géométrique décroissante.

D'un autre côté, le premier rectangle est

$$\frac{m^3}{a^2}a\alpha = \frac{m^3\alpha}{a};$$

quant au second, il est représenté par

$$\frac{m^3}{a^2(1+\alpha)^2}a(1+\alpha)\alpha = \frac{m^3\alpha}{a(1+\alpha)};$$

la différence de ces deux rectangles est

$$\frac{m^3\alpha}{a}-\frac{m^3\alpha}{a(1+\alpha)}=\frac{m^3\alpha^2}{a(1+\alpha)};$$

on a donc, d'après le premier lemme, en appelant S l'aire du segment indéfiniment prolongé,

$$\frac{m^3\alpha^2}{a(1+\alpha)}:\frac{m^3\alpha}{a(1+\alpha)}::\frac{m^3\alpha}{a}:S-\frac{m^3\alpha}{a}$$

ou

$$\alpha:1::\frac{m^3\alpha}{a}:S-\frac{m^3\alpha}{a},$$

d'où

$$S-\frac{m^3\alpha}{a}=\frac{m^3}{a},$$

d'où enfin

$$S=\frac{m^3}{a}(1+\alpha),$$

formule dans laquelle il faut faire tendre α vers zéro, ce qui la réduit à

$$S=\frac{m^3}{a}.$$

Considérons encore la parabole

$$y^3=mx^2,$$

et supposons qu'on veuille obtenir l'aire du segment compris entre l'axe des y et une ordonnée $x=a$: formons la progression

$$a:a(1-\alpha):a(1-\alpha)^2:\ldots,$$

prolongée indéfiniment, de sorte que α étant aussi petit qu'on le voudra, le terme général, néanmoins, tende vers o ; supposons menées les ordonnées

$$x=a,\quad a(1-\alpha),\quad a(1-\alpha)^2,\quad \ldots,$$

et imaginons les rectangles ayant pour bases les distances αx qui séparent deux ordonnées consécutives et pour hauteur l'une de ces ordonnées. L'aire d'un de ces rectangles sera

$$\alpha x \sqrt[3]{m x^2}.$$

Ces rectangles varieront donc en progression géométrique.

Le premier sera représenté par

$$m^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}} a\alpha$$

et le second par

$$m^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}} (1-\alpha)^{\frac{2}{3}} a(1-\alpha)\alpha;$$

leur différence sera

$$m^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}} . a\alpha [1-(1-\alpha)^{\frac{5}{3}}];$$

le premier lemme donnera donc, en désignant par S l'aire cherchée,

$$1-(1-\alpha)^{\frac{5}{3}} : (1-\alpha)^{\frac{5}{3}} :: m^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}} a\alpha : S - m^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}} a\alpha,$$

et, par composition,

$$1 : (1-\alpha)^{\frac{5}{3}} :: S : S - m^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}} a\alpha,$$

d'où

$$S - m^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}} a\alpha = S(1-\alpha)^{\frac{5}{3}}$$

et

$$S = \frac{m^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}} a\alpha}{1-(1-\alpha)^{\frac{5}{3}}}$$

dont il faut trouver la limite pour $\alpha = 0$.

Pour cela Fermat pose

$$1-\alpha = (1-\beta)^3 = 1-3\beta,$$

d'où

$$\alpha = 3\beta,$$

ce qui est remarquable, et

$$(1-\alpha)^{\frac{5}{3}} = (1-\beta)^5 = 1 - 5\beta;$$

il en résulte

$$\frac{\alpha}{1-(1-\alpha)^{\frac{5}{3}}} = \frac{3\beta}{5\beta} = \frac{3}{5},$$

et, par suite,

$$S = \frac{3}{5} m^{\frac{1}{3}} a^{\frac{5}{3}}.$$

Il est certain que cette théorie est bien supérieure à celles de Cavalieri et de Wallis, relatives aux mêmes questions, mais Pascal les traite encore mieux dans un ouvrage publié en 1659, vingt ans par conséquent avant la publication de celui de Fermat.

M. Brassine veut voir dans le Mémoire de Fermat des exemples d'intégration par parties (ou plutôt des exemples de formules qui peuvent s'obtenir par ce mode de transformation), mais les traités publiés par Pascal avec la lettre à M. de Carcavi fourmillent d'exemples semblables et beaucoup plus intéressants que ceux que donne Fermat. De plus Pascal évalue en se jouant des intégrales doubles et triples et les transforme.

Il nous reste à donner un précis des travaux de Fermat sur la théorie des nombres.

La matière pourrait donner lieu à des développements très étendus si, par bonheur, nous n'avions pas, de la main même de Fermat, un aperçu de la méthode qui l'a guidé dans ces travaux.

Cet aperçu a été découvert par M. Charles Henry avec beau-

coup d'autres documents intéressants, notamment des lettres de Fermat à Séguier, à Huet, à Huyghens, à Carcavi, à Mersenne, et une ingénieuse méthode de décomposition des grands nombres en facteurs premiers, par laquelle nous commencerons.

Cette méthode repose sur le théorème suivant : *Si un nombre impair est premier, il est et d'une seule manière la différence de deux quarrés entiers.*

En effet, en désignant par x^2 et y^2 les deux quarrés, on doit avoir : $x^2 - y^2 = n$ ou $(x-y)(x+y) = n$: mais n étant premier ne peut être le produit de deux facteurs qu'à la condition que l'un d'eux soit égal à l'unité; on doit donc poser :

$$x - y = 1 \quad \text{et} \quad x + y = n.$$

On en déduit

$$x = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{n-1}{2}.$$

Ainsi

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = n.$$

Par exemple, soit à reconnaître si 17 est premier, ajoutons à 17 les quarrés 1, 4, 9, 16, 25,... jusqu'à 64, $\left[\text{il n'est pas nécessaire d'aller plus loin puisque } 64 = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right]$; de toutes les sommes qu'on obtient, $17 + 64 = 81$ est le seul nombre quarré : donc 17 est premier.

Cette méthode a été réinventée dans ce siècle, et elle a servi tout récemment à décomposer le nombre $2^{64} + 1$ en facteurs premiers, résultat important dans certaines recherches arithmétiques.

La *Relation des nouvelles descouvertes en la science des nombres* mérite d'être citée *in extenso* : c'est le plus important docu-

ment que nous possédions sur les méthodes arithmétiques de Fermat.

« Et pource que les Méthodes ordinaires qui sont dans les livres estoyent insuffisantes à demonstrer des propositions si difficiles, je trouvay enfin une route tout a fait singulière pour y parvenir. J'appellay cette manière de demonstrer la descente infinie ou indefinie, etc.

« Je ne m'en seruis au commencement que pour demonstrer les propositions négatives, comme par exemple, qu'il n y a aucun nombre moindre (1) de l'unité qu'un multiple de 3 qui soit composé d'un quarré et du triple d'un autre quarré; qu'il n'y a aucun triangle rectangle de nombres dont l'aire soit un nombre quarré. La preuve se fait par ἀπαγωγήν την εις ἀδύνατον en cette manière : s'il y auoit aucun triangle rectangle en nombres entiers, qui eust son aire esgale à un quarré, il y auroit un autre triangle moindre que celuy là qui auroit la mesme proprieté; s'il y en auoit un second moindre que le premier qui eust la mesme proprieté il y en auroit par un pareil raisonnement un troisieme moindre que ce second qui auroit la mesme proprieté et enfin un quatrieme, un cinquieme, etc., a l'infini en descendant. Or est il qu'estant donné un nombre il n'y en a point infinis en descendant moindres que celuy la, j'entens parler tousjours des nombres entiers. D'ou on conclud qu'il est donc impossible qu'il y ait aucun triangle rectangle dont l'aire soit quarré.

« On infère de la qu'il n'y en a non plus en fractions dont l'aire soit quarré, car s'il y en auoit en fractions, il y en auroit en nombres entiers, ce qui ne peut pas estre, car il se peut preuuer par la descente.

(1) Amoindri.

« Je n'adjouste pas la raison d'ou j'infere que s'il y auoit un triangle rectangle de cette nature, il y en auroit un autre de mesme nature moindre que le premier, parce que le discours en seroit trop long, et que c'est la tout le mystere de la methode. Je seray bien aise que les Pascals et les Roberuals et tant d'autres sçavants la cherchent sur mon indication.

« Je fus longtemps sans pouuoir appliquer ma methode aux questions affirmatiues, parce que le tour et le biais pour y venir est beaucoup plus malaisé que celuy dont je me sers aux negatives. De sorte que lors qu'il me falut demonstrer que tout nombre premier qui surpasse de l'unité un multiple de 4, est composé de deux quarrez je me treuuay en belle peine. Mais enfin une meditation diverses fois reiterée me donna les lumieres qui me manquoient. Et les questions affirmatiues passerent par ma methode à l'ayde de quelques nouueaux principes qu'il y fallust joindre par necessité.

« Ce progrès de mon raisonnement en ces questions affirmatives estoit tel. Si un nombre premier pris à discretion qui surpasse de l'unité un multiple de 4 n'est point composé de deux quarrez. il y aura un nombre premier de mesme nature moindre que le donné; et ensuite un troisieme encore moindre, etc., en descendant a l'infini jusques a ce que uous arriviez au nombre 5, qui est le moindre de tous ceux de cette nature, lequel il s'en suivroit n'estre pas composé de deux quarrez, ce qu'il est pourtant d'ou on doit inferer par la deduction à l'impossible que tous ceux de cette nature sont par consequent composez de 2 quarrez.

Il y a infinies questions de cette espece, mais il y en a quelques autres qui demandent de nouveaux principes pour y appliquer la descente, et la recherche en est quelques fois si mal aisée,

qu'on n'y peut uenir qu'auec une peine extrême. Telle est la question suiuante que Bachet sur Diophante avoüe n'avoir jamais peu demonstrer, sur le suject de laquelle M. Descartes fait dans une de ses lettres la mesme declaration, jusques la qu'il confesse qu'il la juge si difficile, qu'il ne voit point de voye pour la résoudre ! tout nombre est quarré, ou composé de deux, de trois ou quatre quarréz.

« Je l'ay enfin rangée sous ma methode et je demonstre que si un nombre donné n'estoit point de cette nature il y en auroit un moindre qui ne le seroit pas non plus, puis un troisieme moindre que le second etc. à l'infini, d'ou l'on infere que tous les nombres sont de cette nature.

« Celle que j'avois proposée a M. Frenicle et autres est d'aussi grande ou meme plus grande difficulté : tout nombre non quarré est de telle nature qu'il y a infinis quarréz qui multipliant ledit nombre font un quarré moins 1.

« Je la demonstre par la descente appliquée d'une manière toute particulière.

« J'aduoue que M. Frenicle a donné diverses solutions particulières et M. Wallis aussi, mais la demonstration generale se trouuera par la descente deuement et proprement appliquée, ce que leur indique, afin qu'ils adjoustent la demonstration et construction generale du théorème et du probleme aux solutions singulieres qu'ils ont données.

« J'ay ensuite consideré certaines questions qui bien que negatives ne restent pas de receuoir tres-grande difficulté, la methode pour y pratiquer la descente estant tout a fait diuerse des precedentes comme il sera aisé d'esprouuer. Telles sont les suiuantes : Il n'y a aucun cube diuisible en deux cubes. Il n'y a qu'un seul

quarré en entiers qui augmenté du binaire fasse un cube : ledit quarré est 25.

« Il n'y a que deux quarrez en entiers lesquels augmentés de 4 fassent cube : les dits quarrez sont 4 et 121.

« Toutes les puissances quarrées de 2 augmentées de l'unité sont nombres premiers. Cette derniere question est d'une tres subtile et tres ingenieuse recherche. Et bien qu'elle soit conçue affirmativement elle est negative puisque dire qu'un nombre est premier c'est dire qu'il ne peut estre divisé par aucun nombre (1).

« Je mets en cet endroit la question suivante dont j'ay enuoyé la demonstration à M. Frenicle apres qu'il m'a aduoué, et qu'il a mesme tesmoigné dans son escrit imprimé qu'il n'a pu la trouuer :

« Il n'y a que les deux nombres 1 et 7 qui, estant moindres de l'unité qu'un double quarré fassent un quarré de mesme nature, c'est-à-dire qui soit moindre de l'unité qu'un double quarré (2).

« Aprés auoir couru toutes ces questions la pluspart de diuerse nature et de differente façon de demonstrer, j'ay passé a l'inuention des regles generales pour resoudre les equations simples et doubles de Diophante. On propose par exemple

2 quarr. + 7967 esgaux a un quarré.

J'ay une regle generale pour resoudre cette equation si elle est possible, ou découvrir son impossibilité. Et ainsi en tous les cas et en tous nombres tant des quarréz que des unitéz. On pro-

(1) Ce théorème est faux : Euler l'a montré.

(2) Ce théorème vient d'être prouvé tout récemment par le Père Pépin et M. Angelo Genocchi.

pose cette équation double $2x + 3$ et $3x + 5$ esgaux chacun a un quarré. Bachet se glorifie en ses commentaires sur Diophante d'auoir trouvé une regle en deux cas particuliers. Je la donne generale en toute sorte de cas. Et determine par regle si elle est possible ou non.

« J'ay ensuite restably la plupart des propositions defectueuses de Diophante. Et j'ay fait celles que Bachet aduoue ne sçavoir pas. Et la pluspart de celles auxquelles il paroit que Diophante mesme a hésité, dont je donneray des preuues et des exemples à mon premier loisir.

« J'advoue que mon invention pour decouvrir si un nombre donné est premier ou non n'est pas parfaite, mais j'ay beaucoup de voyes et de methodes pour reduire le nombre des diuisions et pour les diminuer beaucoup en abbregeant le travail ordinaire. Si M. Frenicle baille ce qu'il a médité la dessus, j'estime que ce sera un secours tres considérable pour les scauants. La question qui m'a occupé sans que j'aye encore pu trouuer aucune solution est la suiuante qui est la derniere du livre de Diophante *de multangulis numeris. Dato numero inuenire quot modis multangulus esse possit*, le texte de Diophante estant corrompu nous ne pouuons pas deviner sa méthode. Celle de Bachet ne m'agrée pas et est trop difficile aux grands nombres. J'en ai bien trouué une meilleure, mais elle ne me satisfait pas encore. Il faut chercher en suite de cette proposition la solution du probleme suiuant.

« Treuver un nombre qui soit polygone autant de fois et non plus qu'on voudra, et treuuer le plus petit de ceux qui satisfont à la question.

« Voila sommairement le conte de mes recherches sur le suject

des nombres. Je ne l'ay escrit que parce que j'apprehende que le loisir d'estendre et de mettre au long toutes ces demonstrations et ces methodes me manquera. En tout cas cette indication seruira aux sçauants pour trouver d'eux mesmes ce que je n'estens point, principalement si MM. de Carcaui et Frenicle leur font part de quelques demonstrations par la descente que je leur ay enuoyees sur le subject de quelques propositions négatiues. Et peut estre la posterité me scaura gré de luy avoir fait connoistre que les anciens n'ont pas tout sceu, et cette relation pourra passer dans l'esprit de ceux qui viendront apres moy pour *traditio lampadis ad filios*, comme parle le grand Chancelier d'Angleterre, suiuant le sentiment et la deuise duquel j'adjousteray, *multi pertransibunt et augebitur scientia.* »

Il n'est pas sans intérêt d'observer que cette méthode par la descente est celle qui a servi à Euler, Legendre, Lejeune-Dirichlet, Lebesgue, pour démontrer un grand nombre d'énoncés de Fermat et beaucoup d'autres propositions numériques. On en trouve la première idée dans le *Commentaire de Campanus de Novare sur les Éléments d'Euclide*. Il est à regretter seulement que cette belle page de Fermat soit restée enfouie dans les papiers de Huyghens, à la bibliothèque de Leyde, jusqu'en 1880.

Depuis, M. Charles Henry a communiqué à l'Académie des Lincei (séance du 3 décembre 1882) quelques propositions extraites d'une Correspondance inédite de Fermat avec le père Mersenne, possédée par M. le Prince Balthazar Boncompagni. Voici ces propositions :

« I. *Théorème.* Soient trouvés deux quarrés desquels la somme soit quarrée, comme 9 et 16. Soit chacun d'eux multiplié par un même nombre composé de 3 quarrés seulement, comme 11. Ces

deux produits seront 99 et 176 qui satisferont à la question, car chacun d'eux et leur somme sont composés de 3 quarrés seulement; et ainsi par la même voie vous en trouverez infinis, car au lieu de 9 et 16, vous pourrez prendre tels autres 2 quarrés que vous voudrez desquels la somme soit quarrée et au lieu de 11 tel autre nombre que vous voudrez composé de 3 quarrés seulement. Si vous prenez au lieu de 11 un nombre composé de 4 quarrés seulement, comme 7, chacun des deux produits, ensemble leur somme, seront composés de 4 quarrés seulement.— Que si vous voulez non seulement 2 nombres, mais 3 ou tel nombre que vous voudrez desquels un chacun, ensemble la somme de tous, soit composé de 3 ou 4 quarrés seulement, il ne faudra que trouver autant de quarrés que vous voudrez des nombres desquels la somme soit quarrée et les multiplier chacun d'eux, *ut supra.* »

Ce théorème est vrai, même sans les restrictions qu'y apporte Fermat; il n'est qu'un cas particulier de propositions trouvées postérieurement par lui. On sait en effet que tout nombre entier qui, débarrassé de la plus grande puissance de 4 qui le divise, n'est pas de la forme $8x + 7$, peut être mis sous la forme ternaire $x^2 + y^2 + z^2$ et l'on sait de plus que tout nombre entier est la somme de quatre quarrés ou d'un moindre nombre de quarrés.

« II. *Problèmes.* Trouver deux triangles rectangles dont les aires soient en raison donnée, en sorte que les deux petits côtés du plus grand triangle diffèrent par l'unité.

« Trouver deux triangles rectangles en sorte que le contenu sous le plus grand côté de l'un et sous le plus petit du même soit en raison donnée au contenu sous le plus grand côté et le plus petit de l'autre.

« Trouver un triangle duquel l'aire ajoutée au quarré de la somme des deux petits côtés fasse un quarré. Voici le triangle :

205769, 190281, 78320.

« *Data summa solidi sub tribus lateribus trianguli rectanguli numero et ipsius hypothenusa, invenire terminos intra quos area constitit. Nec moveat additio solidi et longitudinis : in problematis enim numericis quantitates omnes sunt homogenæ, ut omnes fiunt.*

« Étant donné un nombre, déterminer combien de fois il est la différence de deux nombres dont le produit est un nombre quarré. »

Cette correspondance sera publiée avec divers autres documents nouveaux dans l'édition des Œuvres complètes de Fermat qui se prépare en ce moment sous les auspices du gouvernement français.



DE BEAUNE (FLORIMOND).

(Né à Blois en 1601, mort en 1652.)

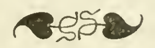
Il suivit d'abord la carrière des armes, puis acheta, en 1626, une charge de conseiller au présidial de Blois. Il fit amitié avec Descartes, qui l'alla voir à Blois en 1644 et demeura quelque temps avec lui.

Aussitôt que parut la *Géométrie* de son ami, il s'employa à la faire connaître et à la commenter, lorsque cela était utile. Ses notes sur ce sujet ont été insérées dans le commentaire de Schooten.

De Beaune avait considéré d'une manière générale le pro-

blème de remonter des propriétés des tangentes à une courbe à l'équation de la courbe ; bien entendu, il ne le résolvait que dans des cas très rares, mais il y avait un certain mérite à l'avoir conçu. Quelques problèmes de ce genre, qu'il avait proposés, furent résolus par Descartes, puis par Leibniz.

On a de lui : *De æquationibus opuscula duo*, où se trouve traitée, pour la première fois, la question des limites supérieure et inférieure des racines d'une équation numérique. Cet ouvrage a été publié en 1659, par les soins d'Erasme Bartholin, à qui les manuscrits de de Beaune avaient été remis par ses héritiers.



KIRCHER (ATHANASE).

(Né à Geyssen en 1601, mort à Rome en 1680.)

Jésuite, physicien, mathématicien, orientaliste, philologue, il a publié une infinité d'ouvrages sur tous les sujets imaginables, depuis l'Arithmétique jusqu'à l'interprétation des hiéroglyphes.

Il paraît être l'inventeur de la lanterne magique.



FONTANA.

(Né aux environs de Naples vers 1602.)

Paraît être l'inventeur du microscope composé à verres convexes. Il le décrit dans ses *novæ terrestrium et cœlestium observationes* (Naples, 1646).



ROBERVAL (GILLES PERSONNE DE)

(Né en 1602 à Roberval (Beauvoisis), mort à Paris en 1675.)

Il vint à Paris en 1627 et s'y lia bientôt avec le Père Mersenne, Mydorge, Étienne Pascal et autres savants, parmi lesquels il tint un rang distingué. Il fut nommé, en 1631, professeur de philosophie au collège Gervais et obtint, peu après, au Collège royal, la chaire de Mathématiques qu'il conserva jusqu'à sa mort, bien qu'il fût soumis à une réélection tous les trois ans, et que de nombreux concurrents la lui disputassent chaque fois.

Doué d'un mérite réel, il se l'exagérait de façon à ne pouvoir pas supporter que d'autres en eussent aussi ; il était passionné, vindicatif, plus soucieux de sa réputation que de la vérité, enfin ombrageux et dissimulé. Ces travers ne pouvaient pas manquer de l'entraîner dans une foule de querelles qui, en effet, troublèrent sa vie d'autant plus malheureusement que, même ayant raison, il savait toujours trouver le moyen de se donner tous les torts.

Il fit partie de l'Académie des Sciences dès sa création en 1665.

Il éprouvait la plus grande peine à exprimer nettement ses idées. Aussi a-t-il laissé peu d'écrits, qui, du reste, ne furent pas imprimés de son vivant. Son ami l'abbé Gallois les fit insérer, en 1693, dans le premier volume qui fut publié par l'Académie des Sciences. Ce sont un *Traité des mouvements composés*, un autre intitulé *De recognitione et constructione æquationum*, sa *Méthode des indivisibles* et un mémoire *De trochoide* (cycloïde).

Montucla défiait « les lecteurs les plus versés dans la méthode

ancienne de tenir contre quelques-unes de ses démonstrations, tant elles sont prolixes et embarrassées, jusque dans l'exposition même. »

Il est plus connu par ses lettres et par celles de ses contemporains.

Roberval avait adressé à Fermat, vers 1636, la solution du problème de la quadrature d'une parabole de degré quelconque

$$y^m = a^{m-1}x$$

et peu après d'une parabole

$$y^m = a^{m-n}x^n;$$

aussi, lorsque parut le *Traité des indivisibles* de Cavalieri, réclama-t-il la priorité.

« Longtemps avant, dit-il dans une lettre de 1644 à Torricelli, longtemps avant que le géomètre italien mît au jour sa méthode, j'en avais une fort analogue ; mais, plus attentif que Cavalieri à ménager les oreilles des géomètres, je l'avais dépouillée de ce que celle de mon concurrent avait de dur et de choquant dans les termes, et considérais les surfaces ou les solides comme composés d'une infinité de petits rectangles ou de petits prismes, etc. » Il ajoute qu'il avait gardé sa méthode *in petto*, dans la vue de se procurer parmi les géomètres une supériorité flatteuse par la difficulté des problèmes qu'elle le mettait en état de résoudre. C'était fort bien ; mais, pendant qu'il se réjouissait *juveniliter*, Cavalieri lui enlevait l'honneur de la découverte.

Roberval est plus connu par sa méthode originale pour la construction des tangentes, mais, quoique l'idée qu'il avait eue fût heureuse, il se fit si peu comprendre que cette méthode avait

été rejetée comme fausse et n'a été effectivement reprise que dans ces dernières années.

C'est cette question des tangentes qui fut le principe de sa querelle avec Descartes, qu'il ne laissa jamais tranquille, alors même que le philosophe ne lui répondait plus depuis longtemps.

Roberval avait le premier, en 1637, quarré la cycloïde. Descartes, informé du résultat par Mersenne, avait immédiatement renvoyé un précis de démonstration du théorème énoncé, en le faisant suivre d'une méthode pour mener la tangente à la courbe; mais Roberval ne réussit pas d'abord à le suivre sur ce nouveau terrain ; il donna plusieurs démonstrations inexactes, essaya de s'en approprier une de Fermat et finit, comme d'habitude, par se fâcher. Il résolut cependant plus tard la question par sa méthode des mouvements composés.

Au reste, sa quadrature même de la cycloïde lui fournit peu après (1644) l'occasion d'une nouvelle querelle avec Torricelli, qui, en l'absence d'une démonstration que Roberval n'avait pas publiée, se crut le droit de donner celle qu'il venait de trouver.

Cette dispute, si elle mit encore mieux au jour les défauts de caractère de Roberval, lui fournit au moins l'occasion de nouveaux succès ; car c'est au milieu de ces démêlés qu'il trouva la mesure des volumes engendrés par la cycloïde tournant autour de son axe ou de sa base.

Pascal, dans son *Histoire de la roulette*, a montré en faveur de Roberval, son ami, une injuste partialité, poussée jusqu'au point de mettre en doute la probité de Torricelli. Il est juste d'en faire un reproche à sa mémoire. Ce n'est pas tout que de n'être pas jésuite, dirons-nous en renversant le mot de Voltaire,

il faut encore être équitable. Torricelli avait autant de belles qualités que Roberval de vilains défauts.

Mais ses travers d'esprit ne doivent pas nous empêcher de lui accorder la place à laquelle il a droit, par ses travaux, dans l'histoire des Mathématiques. Nous ferons cependant une réserve, déjà indiquée dans ce qui précède, relativement à un assez grand nombre de démonstrations contenues dans ses œuvres, et qui pourraient bien avoir été retouchées, après coup, d'après les indications fournies par les travaux de quelques-uns de ses contemporains.

Ses *Mémoires*, qui n'ont été publiés, comme nous l'avons déjà dit, qu'en 1693, ont pu, en effet, être corrigés par lui durant les 35 ou 40 ans qui s'écoulèrent entre l'époque où il commença d'être connu et celle de sa mort, en 1675; il nous sera donc absolument impossible de nous prononcer sur un certain nombre des questions de priorité qu'il a soulevées avec tant d'aigreur.

Nous ne trouvons rien à dire de ses deux traités *De Recognitione æquationum* et *De Resolutione æquationum*, qui ne sont qu'une reproduction, sous une forme un peu plus moderne, des traités correspondants de Viète.

Le mémoire intitulé *Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes* n'a pas été rédigé par Roberval lui-même, mais par un *Gentilhomme bordelais*, à qui il avait donné des leçons en particulier; Roberval avait bien revu ce mémoire avant de le lire, en 1668, à l'Académie des Sciences, mais il s'était borné à indiquer en marge ses impressions, et elles ne sont pas toujours favorables, il y aurait donc quelque injustice à lui reprocher les

quelques inexactitudes que renferme le texte que nous avons.

La démonstration du théorème relatif à la tangente à l'ellipse, entre autres, est évidemment tout à fait vicieuse, le gentilhomme bordelais ayant décomposé le mouvement du point qui décrit la courbe en deux mouvements égaux et de sens contraires, suivant les deux rayons vecteurs. Mais, si l'on est bien obligé de convenir que Roberval a laissé passer cette démonstration, il convient aussi d'observer qu'en marge de la proposition où le principe en est exposé, Roberval avait écrit : *Toute cette proposition est mal digérée, et il vaut mieux la passer que de s'y arrester.* Je suppose que, la construction étant bonne, Roberval aura passé sur la manière d'y parvenir. Ce qui me le fait penser est que la question de la tangente à la conchoïde de Nicomède, ou à une conchoïde quelconque, notamment au limaçon de Pascal, est ensuite aussi parfaitement traitée qu'elle pourrait l'être aujourd'hui. Or les principes à mettre en œuvre étaient à peu près les mêmes dans les deux cas.

La tangente à la cycloïde est aussi fort bien déterminée, comme devant être bissectrice de l'angle formé par la parallèle à la base de la courbe et par la tangente à la circonférence roulante, au point décrivant, en raison de l'égalité des vitesses des mouvements de translation et de rotation du point qui parcourt la cycloïde. Mais cette construction, d'après les témoignages de tous les contemporains, sauf Pascal, a certainement été ajoutée au mémoire, postérieurement à la solution donnée par Descartes, d'après un autre principe.

Le *Traité des indivisibles* contient une bonne exposition de la méthode : on est porté, en le parcourant, à admettre que Roberval en avait puisé la plus grande partie dans son propre

fonds; on reconnaît même qu'il est allé plus loin que Cavalieri dans les applications du principe de la méthode. Toutefois, il serait difficile de supposer qu'il ne dût rien au géomètre italien, car on ne s'expliquerait pas que tous deux fussent tombés, sans concert, sur le même mot *indivisible*, dont le choix est compréhensible de la part de Cavalieri et ne l'est plus de celle de Roberval.

On retrouve dans ce traité la règle pour la construction de la tangente à la cycloïde, déduite de la théorie des mouvements composés et identique à celle que nous avons déjà mentionnée. On y voit aussi la quadrature de la cycloïde, qui se retrouvera dans le *Traité de la trochoïde* et dont nous ne disons rien ici.

L'intérêt particulier de ce *Traité des indivisibles* réside dans l'introduction des deux théorèmes suivants, le premier que *le sinus-verse d'un arc est à cet arc comme la somme des sinus qui correspondent aux points de division de l'arc, partagé en une infinité de parties égales, est à la somme d'autant de rayons du cercle;* et le second, que *la somme des quarrés des sinus d'une infinité d'arcs en progression arithmétique, allant de* 0 *à* $\frac{\pi}{2}$, *est le huitième de la somme d'autant de quarrés du diamètre.*

Voici, en abrégé, les démonstrations que donne Roberval de ces deux théorèmes :

Pour le premier, si l'on double les sinus pour former des cordes du cercle et que l'on mène les diagonales inclinées dans le même sens, des trapèzes mixtilignes obtenus, ces diagonales seront toutes parallèles; elles auront, à des quantités négligeables près, leurs milieux sur le diamètre, et passeront aussi, à des quantités

négligeables près, par les milieux des portions du diamètre; enfin, leurs moitiés formeront chacune, avec le sinus précédent et la moitié de la portion du diamètre comprise entre ce sinus et le suivant, des triangles rectangles tous semblables entre eux et semblables à celui qui aurait pour côtés le diamètre, la corde de la première division de l'arc considéré et la corde du supplément de cette division. On pourra donc poser la proportion : la somme des sinus est à la demi-somme des divisions du diamètre, c'est-à-dire à la moitié du sinus verse de l'arc, comme la corde du supplément d'une des divisions de l'arc, ou, à la limite, le diamètre, est à la corde d'une des divisions, ou à cette division. En multipliant les deux termes du dernier rapport par le nombre des divisions, on trouve la proportion énoncée.

Et pour le second : le quarré du rayon est égal à la somme des quarrés du sinus et du cosinus; mais les cosinus des premiers arcs, dans le quadrant, sont égaux aux sinus des derniers, et réciproquement, de sorte que la somme des quarrés de tous les sinus, augmentée de la somme des quarrés de tous les cosinus, est simplement le double de la somme des quarrés des sinus, et que, par conséquent, la somme des quarrés des sinus est moitié de la somme d'autant de quarrés du rayon, ou bien est le huitième de la somme d'autant de quarrés du diamètre.]

Ce second théorème comporte un corollaire qu'il nous faut aussi mentionner : le diamètre se compose des sinus-verses correspondants à deux arcs supplémentaires; son quarré est donc égal à la somme des quarrés des deux sinus-verses et au double du rectangle formé sur ces sinus-verses, mais le rectangle des deux sinus-verses est le quarré du sinus de l'un ou l'autre des deux arcs supplémentaires. Donc la somme d'autant de quarrés du diamètre

qu'on a pris de divisions égales dans la demi-circonférence vaut deux fois la somme des quarrés des sinus-verses (car chacun d'eux est répété deux fois), plus deux fois la somme des quarrés des sinus. Or le double de la somme des quarrés des sinus, de o à π, est, d'après la proposition précédente, les $\frac{2}{8}$ de la somme d'autant de quarrés du diamètre qu'il a été fait de divisions dans la demi-circonférence; il reste donc, pour la somme des quarrés de tous les sinus-verses de o à π, $\frac{3}{8}$ de la somme d'autant de quarrés du diamètre.

Ces théorèmes seront utilisés, dans le *Traité de la trochoïde*, pour la cubature des volumes engendrés par la cycloïde tournant autour de sa base ou autour de son axe; mais nous mentionnerons ici une application intéressante qu'en fait Roberval dans le *Traité des indivisibles*. Il s'agit de *placer sur un cylindre droit un espace égal à un quarré donné, et ce d'un seul trait de compas*. Roberval prend le rayon de base du cylindre égal à la moitié du côté du quarré donné, et donne au compas la même ouverture.

Le traité *De Trochoïde ejusque spatio* contient la quadrature de la cycloïde, les cubatures des volumes engendrés par la révolution de l'aire de la courbe autour de la base, autour de l'axe et autour de la tangente au sommet; enfin la rectification de la courbe.

Tout le monde accorde à Roberval la priorité dans la solution des deux premières questions; Huyghens, notamment, proclame le fait dans son *Horologium oscillatorium*; mais Roberval voulut aussi s'attribuer la découverte de la rectification de la cycloïde, à laquelle, il serait, dit-il, parvenu le premier, à l'aide de sa méthode des mouvements composés. Or, sur ce point, tout le monde lui donne tort, même Pascal, qui cependant lui attribue la détermination de la tangente à la courbe. D'après Pascal

comme d'après Huyghens, c'est Wrenn qui a le premier rectifié la cycloïde. Roberval, pour établir ses droits, dit qu'il avait, de 1635 à 1640, publié ses autres découvertes tant dans sa chaire que dans les réunions de savants et qu'il n'avait tenu cachée que la proposition relative à la longueur de la cycloïde (*unicam hanc de longitudine trochoïdis propositionem reticui*), espérant que la même méthode le conduirait à de bien plus grandes découvertes (*sperabam enim eâdem methodo me multò majora detecturum*) ; il part de là pour accuser de vol le véritable inventeur : « par ma négligence, dit-il, il est arrivé que des étrangers, nos émules, ou plutôt nos envieux, semblables aux frelons qui, ne pouvant faire le miel, envahissent les rayons des abeilles,..... (*negligentiâ tamen meâ, quòd nihil prælo committerem, factum est ut quidam Extranei, nationis nostræ æmuli, vel potiùs eidem invidi, ex eorum numero qui, ut fuci, apum favos invadunt,.....*). Mais puisque, de son propre aveu, il n'avait fait part à personne de sa découverte, on ne pouvait la lui dérober, on ne pouvait que la refaire et c'est le droit commun. Aussi, tout ce que nous pouvons dire à cet égard de Roberval, est que la démonstration qu'il donne est en effet tirée de sa méthode des mouvements composés. Nous nous bornerons donc à rapporter ses solutions des deux questions qui ne lui sont pas contestées.

Sa quadrature de la cycloïde est très ingénieuse et très simple. Elle est fondée sur la considération d'une courbe qu'il appelle la *compagne* de la trochoïde et qui est le lieu de la projection d'un point de la trochoïde sur le diamètre, perpendiculaire à la base, du cercle générateur qui passe par ce point. L'introduction de cette compagne est d'autant plus méritoire, que Roberval, qui ne se sert jamais d'aucune formule ni d'aucune équation, n'y est

amené que par des considérations exclusivement géométriques. Il y a là une sorte de divination.

Les équations de la cycloïde, en prenant pour axe des x la base, et pour origine le point de rebroussement, sont

$$x = r\omega - r\sin\omega$$

et

$$y = r(1 - \cos\omega),$$

ω désignant l'angle au centre correspondant à l'arc déjà déroulé; Roberval décompose l'abscisse en ses deux parties $r\omega$ et $-r\sin\omega$, et c'est $r\omega$ qu'il prend pour abscisse de la compagne, dont l'équation est ainsi

$$y = r\left(1 - \cos\frac{x}{r}\right);$$

c'est donc une sinussoïde.

On voit immédiatement l'utilité de l'artifice : l'aire comprise entre la courbe et sa base se compose de l'aire de la compagne. limitée de la même manière, et de l'aire comprise entre les deux courbes. Mais l'aire de la compagne est évidemment moitié de l'aire du rectangle circonscrit à la cycloïde (il n'y a, pour le voir, qu'à faire la figure), et, d'un autre côté, l'aire comprise entre la cycloïde et sa compagne, que, par un nouvel artifice, il considère comme composée d'éléments parallèles à la base, est, tout aussi évidemment, égale à l'aire du cercle générateur, l'ordonnée commune aux deux courbes étant $r\sin\omega$, celle du cercle, et l'abscisse relative de l'une par rapport à l'autre étant aussi l'abscisse de ce cercle générateur, comptée à partir de son diamètre vertical.

L'aire comprise entre la cycloïde et la base est donc égale à la moitié de l'aire du rectangle dont les côtés seraient la circon-

férence du cercle générateur déroulée, et le diamètre de ce cercle, augmentée de l'aire du même cercle, c'est-à-dire qu'elle est

$$\frac{1}{2}2\pi R.2R + \pi R^2 \quad \text{ou} \quad 3\pi R^2.$$

Nous passons à la cubature du volume engendré par l'aire de la cycloïde tournant autour de sa base.

Si l'on compare le volume cherché à celui qu'engendrerait le rectangle circonscrit à la cycloïde, comme les abscisses sont les mêmes, on voit que les deux volumes sont entre eux comme la somme des carrés construits sur les ordonnées équidistantes et en nombre infini de la cycloïde est à la somme d'autant de quarrés construits sur le diamètre du cercle générateur.

Mais l'ordonnée de la cycloïde se compose de l'ordonnée de sa compagne et de la différence des ordonnées des deux courbes : soient, pour abréger, y l'ordonnée de la cycloïde, y_1 celle de la compagne et y_2 la différence des ordonnées des deux courbes :

$$y^2 = y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2;$$

le rapport cherché se compose donc, en désignant par R le rayon du cercle générateur, de

$$\frac{\Sigma y_1^2}{4\Sigma R^2} + \frac{2\Sigma y_1 y_2 + \Sigma y_2^2}{4\Sigma R^2}.$$

La première partie

$$\frac{\Sigma y_1^2}{4\Sigma R^2}$$

est connue, par l'un des théorèmes précédents, car les ordonnées y_1 sont les sinus-verses d'arcs en progression arithmétique, comptés de o à 2π, sur la circonférence du cercle générateur;

cette première partie est donc

$$\frac{3}{8};$$

quant à la seconde partie

$$\frac{2\Sigma y_1 y_2 + \Sigma y_1^2}{4\Sigma R^2},$$

elle représente naturellement le volume engendré par l'aire comprise entre la cycloïde et sa compagne, puisque la première représente le volume engendré par l'aire de la compagne; et c'est par cette considération que Roberval en obtient la valeur, indirectement, c'est-à-dire en transformant la question.

On a vu que, pour obtenir l'aire de la cycloïde, il évalue d'abord l'aire de la compagne, considérée comme composée d'éléments rectangulaires compris entre des lignes perpendiculaires à la base; et, ensuite, l'aire comprise entre les deux courbes, considérée comme composée d'éléments compris entre des lignes parallèles à la base.

Il transforme de la même manière la question du volume engendré par l'aire comprise entre les deux courbes tournant autour de la base : il considère cette aire comme composée d'éléments rectangulaires compris entre des parallèles à cette base.

Le cercle générateur intercepte, sur ces parallèles, des parties respectivement égales à celles qui sont comprises entre les deux courbes; les volumes engendrés par les segments de l'aire comprise entre les deux courbes et par les segments du cercle générateur sont donc égaux, puisque les segments sont deux à deux égaux et également distants de l'axe de rotation.

Ainsi, le volume engendré par la rotation, autour de la base, de

l'aire comprise entre la cycloïde et sa compagne est égal au volume engendré par le cercle générateur tournant autour de cette même base, c'est-à-dire à

$$2\pi^2 R^3.$$

Il est donc les $\frac{2}{8}$ du volume engendré par le rectangle circonscrit à la cycloïde, puisque ce volume est

$$4\pi R^2 \times 2\pi R.$$

Le volume engendré par la cycloïde tournant autour de sa base est donc, en résumé, les

$$\frac{5}{8}$$

$\left(\frac{3}{8}+\frac{2}{8}\right)$ du volume engendré par la rotation, autour de la même base, du rectangle circonscrit à cette courbe.

Roberval évalue ensuite les volumes engendrés par la cycloïde tournant, soit autour de l'axe de la courbe, soit autour de la tangente à son sommet; mais nous ne le suivrons pas dans ces nouvelles recherches, parce que les procédés sont les mêmes.

Toute cette théorie est assurément fort ingénieuse; mais il faut bien remarquer que les procédés de démonstration ne réussissent que parce les questions portent sur l'aire entière de la courbe et sur les volumes engendrés par cette aire entière. Il s'établit, dans ce cas, des compensations qui font disparaître les principales difficultés que présenteraient les évaluations de l'aire d'un segment de la courbe, ou du volume engendré par ce segment.

C'est Pascal qui a le premier abordé les questions relatives aux segments de l'aire de la courbe et des volumes engendrés par cette aire.

OTTO DE GUERICKE.

(Né à Magdebourg en 1602, mort à Hambourg en 1686.)

Il fut, pendant trente-sept ans, bourgmestre de sa ville natale. Mis, par ses fonctions, en relation avec des princes et des diplomates allemands, il sut les intéresser à ses travaux et à ses expériences.

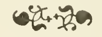
Le premier, il tira une étincelle d'un globe de soufre électrisé et soupçonna que cette étincelle pourrait bien être de même nature que l'éclair qui précède le bruit du tonnerre. Le premier aussi, il réussit à extraire l'air d'un vase clos. On lit, dans son bel et intéressant ouvrage *Experimenta nova*, le récit des nombreuses tentatives qu'il fit avant d'arriver à un moyen un peu pratique d'opérer le vide.

Il essaya d'abord de retirer l'eau d'une barrique à l'aide d'une espèce de grande seringue adaptée à la partie inférieure. Mais, à mesure que la barrique se vidait, l'air entrait par toutes les fissures en produisant une sorte de sifflement. Il remplaça le tonneau par deux hémisphères en cuivre emboîtés l'un dans l'autre; mais le globe qu'ils formaient se comprima tout à coup avec explosion (on devrait avoir le droit de dire *implosion*), pendant qu'on y faisait le vide.

Après divers autres essais, Guericke arriva enfin à exécuter une machine pneumatique, non telle qu'on en a aujourd'hui, mais suffisante pour lui permettre d'entreprendre une série d'expériences sur les divers effets du vide (1654). Chargé d'une mission auprès de la Diète réunie à Ratisbonne, il émerveilla plusieurs des hauts membres de l'assemblée, entre autres l'empereur, en les rendant témoins des phénomènes alors fameux sous le nom

d'*expériences de Magdebourg.* Il émerveilla surtout l'assistance par ses deux hémisphères retenus en contact par la seule pression de l'air, et que seize forts chevaux suffisaient à peine à séparer. L'archevêque de Mayence voulut avoir l'instrument de Guericke. Il l'emporta dans son palais, et il prenait plaisir à répéter et à expliquer lui-même les expériences.

Guericke a aussi fait de bonnes observations astronomiques. Un des premiers, il annonça qu'on pourrait prédire le retour des comètes. Il donnait des taches du Soleil une explication qui n'a point été admise. Il supposait qu'elles n'étaient autre chose que de petites planètes dont la révolution s'effectuait dans des cercles très rapprochés de cet astre. Ses travaux et ses principales observations ont été publiés sous le titre : *Experimenta nova, ut vocant Magdeburgica, de vacuo spatio*, etc. (Amsterdam, 1672). Il avait écrit une histoire : *Historia civitatis Magdeburgensis occupatæ et combustæ*, qui ne fut pas imprimée.



DODSON (JACQUES).

(Né à Londres, mort en 1657.)

Professeur de Mathématiques à Christ-Church-Hospital. Il publia une table des nombres correspondants à tous les logarithmes de $\frac{1}{100\,000}$ en $\frac{1}{100\,000}$, beaucoup plus rationnelle, par conséquent, que la table des logarithmes des nombres entiers, qui est cependant universellement adoptée.

Ce fut lui qui émit l'idée de la fondation des Compagnies d'assurances sur la vie.



GLAUBER (RUDOLPHE).

(Né à Carlstadt en 1603, mort à Amsterdam en 1668).

Son nom est resté attaché, dans le glossaire pharmaceutique, au sulfate de soude, qui porte encore le nom de *Sel de Glauber*. Glauber raconte qu'étant à Newstadt, à vingt et un ans, épuisé par une affection grave de l'estomac, il se guérit rapidement en buvant d'une eau de fontaine que les gens du pays appelaient *Salpeter-Wasser* et croyaient nitrée. Cette circonstance paraît avoir déterminé sa vocation.

Il lui vint l'idée d'analyser l'eau de cette fontaine, et, pour cela, il en fit évaporer une certaine quantité dans une capsule; il vit se former de beaux cristaux longs, qu'on aurait pu confondre avec ceux que donne le nitre, mais qui ne fusaient point sur le feu.

Il reconnut plus tard que ce sel n'était autre chose que celui que l'on obtient en faisant cristalliser le résidu de la préparation de l'*esprit de sel*, obtenu par la réaction de l'huile de vitriol sur le sel marin. « Ce sel, dit-il, quand il est bien préparé, a l'aspect de la glace; il forme des cristaux bien transparents, qui fondent sur la langue. Il a un goût particulier, sans âcreté. Projeté sur des charbons ardents, il ne décrépite pas comme le sel de cuisine et ne déflagre point comme le nitre. Il est sans odeur, et supporte tous les degrés de chaleur. On peut l'employer avec avantage en Médecine, tant à l'intérieur qu'à l'extérieur. Il modifie et cicatrise les plaies récentes, sans les irriter. Dissous dans de l'eau tiède et donné en lavement, il purge les intestins. »

Glauber n'ignorait pas que l'esprit de sel (acide chlorhydrique) n'est liquide que parce qu'il est préparé en présence de l'eau

qui l'absorbe ; il savait aussi que, dans la réaction d'où il provient, l'huile de vitriol se substitue à l'esprit dégagé.

Mais il étendait un peu, ce semble, les usages de cet esprit de sel : « pour apprêter, dit-il, un poulet, des pigeons ou du veau à la sauce piquante, on met ces viandes dans de l'eau, avec du beurre et des épices, puis on y ajoute la quantité que l'on désire d'esprit de sel, suivant le goût des personnes ; on peut ainsi, par son moyen, amollir et rendre mangeable la viande la plus coriace, de vache ou de vieille poule. »

Il obtint le chlore, qu'il appelait huile d'esprit de sel, en distillant l'esprit de sel additionné de cadmie et de rouille de fer. « Cet esprit, de couleur jaune, dissout, dit-il, les métaux et presque tous les minéraux. On peut l'employer en médecine, en alchimie et en beaucoup d'arts ; lorsqu'on le laisse digérer avec de l'esprit de vin concentré (diphlegmé), il se forme à la surface une couche huileuse, qui est l'huile de vin, et qui constitue un excellent cordial. »

Il étudia aussi les produits de la distillation de la houille, dont il tirait une huile rouge de sang, très utile pour le pansement des ulcères chroniques.

Il montre une sagacité rare dans l'explication des réactions ; en voici deux exemples : on prépare le *beurre d'antimoine* (chlorure d'antimoine) en distillant un mélange de sublimé corrosif (perchlorure de mercure) et d'antimoine naturel (sulfure d'antimoine). Or, voici ce que dit Glauber de la réaction qui se produit : « Dès que le mercure sublimé éprouve l'action de la chaleur, l'esprit, qui est combiné avec le mercure, se porte de préférence sur l'antimoine, tandis que le soufre de l'antimoine naturel se combine avec le mercure ; le beurre d'antimoine forme

une huile épaisse, qui s'élève dans le récipient, et le cinabre s'attache au col de la cornue ; le beurre d'antimoine n'est donc qu'une dissolution d'antimoine métallique dans de l'esprit de sel. »

Voici le second exemple : il s'agit de la réaction d'une solution d'or dans de l'eau régale sur la liqueur des cailloux (silicate de potasse). « L'eau régale, dit Glauber, qui tient l'or en dissolution, trie le sel de tartre (la potasse), de la liqueur des cailloux et lui fait abandonner la silice ; en échange, le sel de tartre paralyse l'eau régale et lui fait lâcher l'or ; c'est ainsi que l'or et la silice, privés de leurs dissolvants, se précipitent, et, si l'on pèse le précipité, on y trouve les poids réunis de l'or et de la silice employés. »

Ces idées entièrement nouvelles furent repoussées comme dangereuses, sur quoi Glauber disait : « Je ne prétends imposer mes idées à personne ; que chacun garde les siennes si bon lui semble, je dis ce que je sais sans autre intérêt que celui de la Science. » Mais il était loin d'être insensible aux attaques dont il était l'objet ; en effet il dit : « Les hommes sont faux, méchants et traîtres : rien de leur parole n'est sincère. Si je n'ai pas fait dans ce monde tout le bien que j'aurais pu faire, c'est la perversité des hommes qui en est la cause. » Malheureusement, beaucoup d'hommes dévoués ont pu, de tout temps, en dire autant.



MARQUIS DE MALVASIA.

(Né en 1603, mort en 1664.)

Il était sénateur de Bologne, où il fonda un observatoire, dans le but d'apprendre à connaître l'avenir. Cassini, qu'il avait

appelé près de lui, le convertit à des idées plus saines, et le marquis l'en récompensa en lui faisant obtenir la succession de Cavalieri à la chaire de Mathématiques.

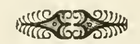
Malvasia a du reste un titre personnel à l'estime de la postérité : il perfectionna le micromètre imaginé par Huyghens, en divisant le champ de la lunette par des fils croisés de manière à former de petits carrés égaux entre eux.

COURCIER (PIERRE).

(Né à Troyes en 1604, mort à Auxerre en 1692.)

Jésuite. Il professa la Théologie et les Mathématiques dans différentes maisons de son ordre, puis devint provincial pour la Champagne.

Le seul ouvrage qui préservera son nom de l'oubli, et qui, selon M. Chasles, mériterait d'être plus connu est son *Opusculum de sectione superficiei sphæricæ per superficiem sphæricam cylindricam atque conicam* (1663), où il étudie les courbes à double courbure, formées des intersections mutuelles de la sphère, du cylindre et du cône de révolution. Il s'y occupe aussi de la quadrature des polygones sphériques, limités par des arcs de grands ou de petits cercles.



BOULLIAU (ISMAEL).

(Né à Loudun en 1605, mort à Paris en 1694.)

Astronome distingué. Il s'attacha surtout à rechercher les preuves du mouvement de la Terre et à défendre le système de

Copernic, qui avait encore de nombreux adversaires, même parmi les astronomes. Le désir bien naturel de trouver des partisans au nouveau système du monde, lui en fit chercher jusque dans l'antiquité. Il rechercha et publia tous les morceaux épars des œuvres des pythagoriciens sur la matière.

Il est le premier qui ait cherché une explication des changements d'éclat de quelques étoiles.

Ses principaux ouvrages sont : *De natura lucis* (1638) ; *Philolaus seu De vero systemate mundi* (1639) ; *Astronomica Philolaïca* (1645) ; *De lineis spiralibus demonstrationes* (1657) ; *Ad astronomos monita duo* (1657). On lui doit aussi une traduction habilement faite de l'Arithmétique de Théon de Smyrne, dont le texte grec était rempli de fautes qu'il a fallu corriger.



FRENICLE DE BESSY (BERNARD).

(Né à Paris vers 1605, mort en 1675.)

Conseiller à la Cour des monnaies, il consacrait ses loisirs aux Mathématiques et fut en correspondance avec les principaux savants de son temps, notamment avec Fermat, qui en faisait beaucoup de cas.

Ses travaux ont presque tous trait à la Théorie des nombres. Ceux qui ont été imprimés ont été recueillis par La Hire ; ils ont paru dans le Tome V des Mémoires de l'Académie des Sciences ; en voici les titres : *Traité des triangles en nombres ; Méthode pour trouver la solution des problèmes par les exclusions ; Abrégé des combinaisons ; Traité des quarrés magiques ; Table générale des quarrés de quatre en quatre.*

On attribue encore à Frenicle deux Traités inédits sur les nombres premiers et les nombres polygonaux. Enfin des documents récemment publiés mentionnent de lui des commentaires sur les dialogues de Galilée et des calculs pour les éclipses.

M. Charles Henry a extrait de sa correspondance inédite avec Huyghens l'énoncé du problème suivant, qui a été résolu en 1880 par le père Pépin : il s'agit de trouver les solutions entières du système des équations

$$x^2 + y^2 = z^2$$
$$u^2 + v^2 = x^2$$
$$u - v = x - y.$$

BORELLI (JEAN-ALPHONSE).

(Né à Naples en 1608, mort en 1679.)

Médecin et mathématicien, disciple de Benedetto Castelli.

Il étudia la Physique et les Mathémathiques à Pise, obtint une chaire à Messine, fut rappelé à Pise en 1656 par Ferdinand II, pour y occuper la chaire de Mathématiques, et contribua à la fondation, dans cette ville, de l'*Academia del cimento*, dont les membres s'étaient surtout préoccupés de propager les idées de Galilée et d'en multiplier les applications.

Il se voua alors à l'étude et au progrès des Sciences médicales. qu'il chercha surtout à faire profiter des connaissances déjà acquises en Mécanique et en Physique. Il est le premier physiologiste qui ait donné l'explication des mouvements produits par les animaux au moyen de leurs muscles, d'après la manière dont ces muscles sont rattachés à la charpente osseuse, en faisant à

cette sorte de recherches une judicieuse application de la théorie du levier. Le principal de ses ouvrages, intitulé : *De motis animalium* (1680-1681) a précisément pour objet cette importante théorie.

Il avait découvert dans un manuscrit arabe le 7e livre des coniques d'Apollonius et en donna une traduction ; il publia en 1658 à Pise : *Euclides restitutus, Appollonii elementa conica* et *Archimedis opera breviori methodo demonstrata.*



TORRICELLI (EVANGELISTA).

(Né à Faenza en 1608, mort en 1647.)

Il étudia d'abord au collège des jésuites de sa ville natale. Envoyé à Rome à l'âge de vingt ans pour y suivre les leçons de Benoît Castelli, disciple de Galilée, il ne tarda pas à devenir l'ami et le confident de ce maître, qui le mit bientôt en relation avec Galilée lui-même.

Son premier travail, qui ne fut imprimé qu'en 1644, refondu avec plusieurs autres, avait pour objet l'étude du mouvement parabolique des projectiles ; il contenait cette remarquable proposition, que les paraboles décrites par une infinité de projectiles lancés d'un même point, avec la même vitesse, dans toutes les directions, ont pour enveloppe un même paraboloïde, en dehors duquel aucun projectile ne peut parvenir. Le manuscrit fut envoyé à Galilée, qui conçut dès lors une estime méritée pour le jeune savant et désira l'avoir près de lui. Mais la réunion n'eut lieu que beaucoup plus tard, et Torricelli ne put jouir que durant trois mois de la société de l'illustre vieillard

Le P. Mersenne avait, en 1638, annoncé à Galilée la découverte que Roberval venait de faire de la quadrature de la cycloïde. L'annonce ne contenait aucune démonstration; Galilée, qui, le premier, avait attiré l'attention des géomètres sur cette courbe, transmit la lettre de Mersenne à ses disciples et à ses amis. Cavalieri ne put parvenir à résoudre la question; Torricelli trouva l'aire de la courbe. Viviani en détermina la tangente.

Torricelli a depuis publié, en 1644, à la suite de ses autres ouvrages, la démonstration qu'il avait trouvée de la formule qui donne la quadrature de la courbe; cette publication, faite de bonne foi, et d'autant plus légitime que Roberval n'avait fourni aucune preuve, fut l'origine d'une longue querelle qui abrégea les jours de Torricelli et sur laquelle nous reviendrons.

On ne sait pas à quelle époque il découvrit sa fameuse loi de l'écoulement des liquides; elle n'a été rendue publique qu'en 1644.

L'origine de la découverte du baromètre est mieux connue: des fontainiers de Florence, ayant voulu établir une pompe aspirante pour élever l'eau à une hauteur qui dépassait 32 pieds, n'avaient naturellement pas pu parvenir à la faire fonctionner utilement; ils vinrent consulter Galilée, qui, d'abord embarrassé, répondit à tout hasard que la nature n'avait horreur du vide que jusqu'à 32 pieds. Il touchait alors au terme de sa vie et, quoiqu'il eût certainement connaissance de la pesanteur de l'air, comme on le voit dans ses *Dialogues*, il ne put que léguer à Torricelli le soin de trancher la question. C'est en 1643 (Galilée venait de mourir) que Torricelli, soupçonnant que le contre-poids qui soutient l'eau au-dessus de son niveau dans le tuyau d'une pompe aspirante est le poids de la masse d'air

appuyée sur sa surface extérieure, imagina de répéter l'expérience avec un liquide plus dense que l'eau, pour voir si la différence de niveau serait moindre, comme il supposait que cela devait être. Il se servit pour cela du mercure ; il en remplit un tube fermé par un bout, le renversa par l'autre bout dans un bain du même liquide, et ainsi le premier baromètre se trouva construit.

La mort de Galilée avait laissé vacante la chaire de Mathématiques à l'Académie de Florence ; Torricelli, qui avait assisté ce grand homme à son lit de mort, et qui avait reçu de lui le dépôt de ses papiers, fut appelé à lui succéder, et le grand-duc le nomma un de ses mathématiciens.

En 1644, comme nous l'avons déjà dit, Torricelli songea à réunir tous ses ouvrages et à les publier. La plupart se rapportaient à la pesanteur ; il les rassembla sous le titre : *De motu gravium naturaliter accelerato*. On y remarque, outre ce dont nous avons déjà parlé, ce principe, qui est peut-être la plus ancienne expression rudimentaire du théorème des vitesses virtuelles : « Lorsque deux poids sont tellement liés ensemble, qu'étant placés comme l'on voudra leur centre de gravité commun ne hausse ni ne baisse, ils sont en équilibre dans toutes ces situations. » C'est à l'aide de ce principe que Torricelli déterminait le rapport de deux poids qui, attachés à une même corde passée sur une poulie, et reposant sur deux plans diversement inclinés, s'y font équilibre.

La publication de ses *opuscula geometrica*, composés de trois traités *de Solidis sphæralibus, de Quadratura parabolæ* et *de Solido hyperbolico acuto*, avec un appendice *de cycloïde* (Florence 1644) attira, comme nous l'avons dit, à Torricelli d'injustes reproches de la part du vain et irascible Roberval.

Celui-ci passant bientôt d'une discussion modérée aux plus violentes injures, Torricelli mit fin à la querelle en lui répondant, par une lettre de 1646, « qu'il importait peu que le problème de la cycloïde fût né en France ou en Italie; qu'il ne s'en disait pas l'inventeur; que jusqu'à la mort de Galilée on n'avait point connu en Italie la mesure de cette courbe, qu'il avait trouvé les démonstrations qu'on lui contestait et qu'il s'inquiétait peu qu'on le crût ou non; que si l'on était si jaloux de cette découverte, il l'abandonnait à qui la voulait, pourvu qu'on ne prétendît pas la lui arracher par violence, etc. » C'est cette lettre que Pascal a plus tard travestie, en la présentant comme une rétractation et un aveu.

Le traité *de Solido hyperbolico acuto* contient la détermination du volume engendré par la révolution de l'aire comprise entre une hyperbole et son asymptote, autour de cette asymptote.

Comme Galilée, Torricelli était aussi habile à exécuter les instruments qu'à les imaginer, et l'on montre encore à Florence plusieurs objectifs travaillés par lui. Ses ouvrages sont d'ailleurs remarquables sous le rapport du style, par l'élégance, la concision et la clarté. Outre quelques opuscules que nous n'avons pu mentionner, il a laissé un grand nombre de manuscrits, que l'on conserve précieusement à Florence, mais que l'on ferait peut-être mieux de publier.

Le dernier ouvrage que nous ayons de Torricelli a été publié après sa mort, en 1647, sous le titre *Exercitationes Geometricæ*; il contient ses recherches sur les quadratures des paraboles de degrés supérieurs, la cubature des volumes engendrés par leurs segments et la détermination des centres de gravité de ces segments.

Voici comment Pascal parle du démêlé de Roberval avec Torricelli, au sujet de la quadrature de la cycloïde :

« Ainsi la chose devint publique, et il n'y eut personne en France, de ceux qui se plaisent à la Géométrie, qui ne sût que M. de Roberval était l'auteur de cette solution, à laquelle il en ajouta dans ce temps (1635) deux autres : l'une sur la dimension du solide à l'entour de la base; l'autre l'invention des touchantes de cette ligne, par une méthode qu'il trouva alors et qu'il divulgua incontinent...

« En 1638, feu M. de Beaugrand, ayant ramassé les solutions du plan de la roulette, les adressa à Galilée sans nommer les auteurs...

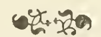
« Galilée mourut bientôt après et, M. de Beaugrand aussi. Torricelli succéda à Galilée, et, tous ses papiers lui étant venus entre les mains, il y trouva entre autres ces solutions de la roulette, sous le nom de cycloïde, écrites de la main de M. de Beaugrand, qui paraissait en être l'auteur, lequel étant mort, il crut qu'il y avait assez de temps passé pour faire que la mémoire en fût perdue, et ainsi il pensa à en profiter. Il fit donc imprimer son livre en 1644, dans lequel il attribue à Galilée ce qui est dû au Père Mersenne, d'avoir formé la question de la roulette; et à soi-même ce qui est dû à M. de Roberval, d'en avoir le premier donné la résolution...

« Beaucoup de monde y a été pris et je l'avais été moi-même; ce qui a été cause que, par mes premiers écrits, je parle de cette ligne comme étant de Torricelli, et c'est pourquoi je me suis senti obligé de rendre par celui-ci à M. de Roberval ce qui lui appartient véritablement. »

Si l'on passe sur l'histoire des petits papiers de M. de Beau-

grand, le raisonnement peut se résumer ainsi : « Tout le monde en France savait que Roberval avait quarré la cycloïde; or, moi, Pascal, qui habite Paris, je l'ignorais; donc Torricelli, qui résidait à Florence, le savait parfaitement. » Ce syllogisme a bien la grâce suffisante, mais le sérieux y manque. Pascal aurait dû ajouter : « car Torricelli avait le télescope de Galilée. »

Rien de triste comme ces perpétuelles accusations de plagiat; elles nuisent encore plus aux accusateurs qu'aux accusés.



WHARTON (THOMAS).

(Né dans le Yorkshire en 1610, mort en 1673.)

Il est le premier qui ait étudié avec soin les glandes, dont il donna la description complète dans son *Adenographie* (Londres, 1656) où il distingue les artères, les veines, les nerfs et les canaux excréteurs. C'est lui qui découvrit le canal excréteur (canal de Wharton) par lequel se déverse dans la bouche le liquide formé dans les glandes sous-maxillaires.



BOBART (JACQUES).

(Né à Brunswick en 1610, mort à Oxford en 1679.)

Médecin et botaniste. Il fut le premier surintendant du jardin botanique créé en 1632 à Oxford par le comte de Derby. On lui doit les premières observations sur les organes sexuels des plantes; il reconnut que le *lychnis dioïca* a des fleurs mâles ou des fleurs femelles. Il isola une plante à fleurs femelles qui ne

fructifia point. Ensuite il secoua sur quelques plantes à fleurs femelles, isolées, la poussière des fleurs mâles; les fleurs de celles qui avaient reçu la poussière furent seules fécondées.

Il a laissé un *Catalogus plantarum horti medici oxoniensis* (1648).



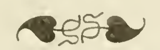
FERDINAND II DE MÉDICIS, GRAND DUC DE TOSCANE.

(Né en 1610, mort en 1670.)

C'est sous son règne que Galilée reçut à Florence l'ordre de se rendre à Rome pour y comparaître devant le tribunal de l'Inquisition. Quoique entièrement soumis à la cour de Rome, Ferdinand II ne laissa pas que d'être utile à Galilée durant son procès. L'intervention active de son ambassadeur près le Saint-Siège, Nicolini, obtint en effet d'Urbain VIII, pour l'illustre astronome, un traitement moins rigoureux que celui qui attendait ordinairement les victimes de l'Inquisition.

En 1646, Ferdinand II perfectionna le thermomètre imaginé vers 1602 par Galilée et déjà amélioré en 1615 par Sagredo : les thermomètres de Galilée et de Sagredo étaient des thermoscopes à air; Ferdinand remplit entièrement la boule et le tube d'esprit de vin coloré et ferma le tube après avoir entièrement chassé l'air de l'appareil.

Mais Ferdinand n'eut pas l'idée de graduer son instrument entre deux points fixes. Ce furent Boyle et Halley qui y apportèrent ce dernier perfectionnement.



HÉVÉLIUS (JEAN).

(Né à Dantzig en 1611, mort en 1687.)

Astronome. Son véritable nom est Hovel.

Il construisait lui-même ses instruments et ses lunettes, et imprimait ses ouvrages. Sa femme observait avec lui; il la représente dans une des planches de sa *Machine céleste*. Colbert le mit au nombre des savants étrangers à qui Louis XIV faisait des pensions. En 1679, un incendie allumé par son domestique consuma sa maison, son observatoire, qu'il avait établi au-dessus, ses livres, ses instruments et l'édition presque entière du second volume de sa *Machine céleste*.

Le recueil manuscrit de ses observations, acheté par Delille, est à l'Observatoire de Paris.

Son premier ouvrage est intitulé *Selenographia, sive Lunæ descriptio*, etc. (1647). Il débute par des détails sur la construction et l'usage des lunettes, et indique l'emploi d'un *polémoscope* formé de deux tubes recourbés à angle droit, à l'intersection desquels se trouve un miroir incliné sur chacun d'eux de 45°. On emploie quelquefois cet appareil pour observer plus commodément près du zénith.

Il donne ensuite à peu près exactement les durées des révolutions de quatre satellites de Jupiter. Il admet le mouvement elliptique des planètes autour du Soleil.

Il employa quatre ans à dresser sa carte de la Lune, dont il gravait lui-même, à mesure, les planches au burin. Pour estimer la hauteur des montagnes, il observait, comme on fait aujourd'hui, la distance des sommets à la limite de l'ombre; mais le calcul lui donna des hauteurs exagérées. Il est le premier astro-

nome qui ait fait une bonne étude du mouvement libratoire.

Son second ouvrage est sa *Cométographie*, dédiée à Louis XIV en 1668. On n'y trouve, au milieu d'élucubrations de tous genres, qu'une seule bonne idée, c'est que les comètes, probablement, décrivent des paraboles et non pas des lignes droites, comme on le croyait avant lui. Mais il était bien éloigné de les comparer aux planètes. C'est par une assimilation confuse avec le mouvement des corps près de la surface de la Terre que l'idée lui était venue de supposer parabolique le mouvement des comètes.

Sa *Machine céleste* est aussi dédiée à Louis XIV. Le premier volume est de 1673, le second de 1679; ce second volume est très rare. L'ouvrage entier ne contient guère, outre la description des instruments, que le détail des innombrables observations faites avec soin par l'auteur; on y remarque cependant la première observation d'une étoile double, la 61[e] du Cygne. Son dernier grand ouvrage, *Prodromus Astronomiæ*, etc., ne parut qu'après sa mort, en 1690; il est dédié par sa veuve à Sobieski. Hévélius croyait la hauteur du pôle et l'obliquité de l'écliptique constantes. Il donnait encore au Soleil une parallaxe horizontale de 40″. L'Observatoire de Paris possède un recueil étendu de ses lettres manuscrites.

BOSSE (ABRAHAM).

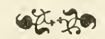
(Né à Tours en 1611, mort en 1678.)

Peintre et graveur distingué. Il avait appris de Desargues la Perspective dont il composa un bon traité. C'est à lui du reste

qu'on doit ce qui nous est parvenu des ouvrages de Desargues.

Reçu à l'Académie de Peinture de Paris, qui venait d'être fondée, il fut chargé d'y enseigner la Perspective. Mais ses théories déplurent à plusieurs de ses collègues, notamment à Lebrun. La vivacité avec laquelle il défendit ses opinions lui suscita de nombreux ennemis qui eurent le crédit de le faire exclure de l'Académie; il quitta Paris et se retira à Tours où il termina sa carrière.

Il a laissé près de mille gravures estimées et quelques tableaux.



TACQUET (ANDRÉ).

(Né à Anvers en 1612, mort en 1660.)

Jésuite. Il enseigna les Mathématiques à Louvain et ensuite à Anvers. Il a publié : *Elementa Geometriæ planæ ac solidæ* (Anvers, 1654); *Arithmeticæ theoria et praxis* (Anvers, 1655), et différents autres ouvrages de moindre importance.

Ses œuvres ont été réunies après sa mort et publiées en 1668 en deux volumes *in-folio*. Le premier volume est tout entier consacré à l'Astronomie; le second contient : *Geometria practica*, en cinq livres; *Optica*, en trois livres; *Catoptrica*, en trois livres, *Cylindrica et annularia*, en cinq livres; il se termine par une dissertation *De Circulorum volutionibus*. Ces deux volumes se trouvent à la bibliothèque de la Sorbonne.

Tacquet, dans son Astronomie, conserve l'hypothèse de l'immobilité de la Terre; il avoue cependant que l'opinion contraire a trouvé de savants défenseurs. Il refait, dans ses *Cylindrica et annularia*, toute la théorie des onglets; Pascal le cite à ce sujet.

PERRAULT (CLAUDE).

(Né à Paris en 1613, mort en 1688.)

Son père était avocat au Parlement. Il étudia d'abord la Médecine et se fit recevoir docteur. Il fut chargé par Colbert de traduire Vitruve en français. Les études qu'il fut obligé de faire pour comprendre cet auteur lui inspirèrent le goût le plus vif pour l'architecture et dévoilèrent les rares dispositions qu'il avait pour cet art. Mais ce goût pour l'architecture ne lui fit pas abandonner ses recherches en Médecine et surtout en Anatomie. Devenu membre de l'Académie des Sciences, il disséqua un grand nombre d'animaux dont l'anatomie était peu ou pas connue et consigna ses recherches dans les Mémoires de l'Académie. Ses essais de Physique renferment plusieurs Mémoires intéressants de physiologie, notamment sur la Mécanique animale. Lorsqu'il fut question de donner au Louvre une façade digne de la grandeur du monument, il prit part au concours qui fut alors ouvert et ses dessins furent préférés à ceux des artistes les plus distingués. Son œuvre de début fut donc cette fameuse *colonnade du Louvre*, construite de 1666 à 1670, et qui, malgré quelques imperfections, reste une des belles créations du XVIIe siècle. On lui doit encore l'Observatoire de Paris, dans la construction duquel il ne fit entrer ni fer ni bois et où il montra une rare connaissance de la coupe des pierres; des travaux d'embellissement à Versailles; enfin un arc de triomphe à la porte Saint-Antoine, lequel fut démoli en 1716. Il en reste une gravure de Sébastien Leclere.

C'est pour le blesser que Boileau écrit : *Soyez plutôt maçon, si c'est votre métier*. La colonnade du Louvre et l'Observatoire

suffisent pour montrer qu'il était du moins un maçon d'un grand talent, et les éloges que lui donne Cuvier prouvent qu'il était aussi un bon naturaliste.

C'est lui qui, plus frappé des erreurs des anciens que sensible à leurs beautés, commença cette querelle à laquelle son frère Charles prit ensuite la plus grande part, et dans laquelle Boileau se permit autant de violences que ses adversaires montrèrent de modération.

Claude Perrault dirigeait à l'Académie des Sciences les travaux relatifs à l'histoire naturelle. Il a laissé sur l'Anatomie un ouvrage estimé, dans lequel il fait justice des fables antiques sur le caméléon, la salamandre et le pélican; ses *Œuvres de Physique* contiennent une théorie remarquable de l'organe de l'ouïe et de ses fonctions; enfin son Traité sur la *Mécanique des animaux* est rempli d'observations justes, et souvent fines, sur l'organisme en général.

Perrault fut la victime de son amour pour la Science. Il mourut des suites d'une piqûre anatomique qu'il se fit en disséquant un chameau mort d'une maladie contagieuse. Indépendamment d'un grand nombre de Mémoires insérés dans le Recueil de l'Académie des Sciences, et pour la plupart relatifs à l'Histoire naturelle, on lui doit : les *Dix livres d'Architecture de Vitruve, corrigés et traduits nouvellement en français avec notes et figures* (Paris, 1673, in-fol.); *Ordonnance des cinq espèces de colonnes selon la méthode des anciens* (Paris, 1683, in-fol.); *Essai de Physique* ou *Recueil de plusieurs Traités touchant les choses naturelles* (1680, 3 vol. in-12); *Mémoires pour servir à l'histoire naturelle des animaux* (Paris, 1676, in-fol.); *Œuvres diverses de Physique et de Mécanique* (Paris, 1725, in-12).

NICERON (JEAN-FRANÇOIS).

(Né à Paris en 1613, mort à Aix en 1646.)

Minime. On le connaît surtout pour sa *Perspective curieuse* (Paris, 1638), qui roule presque entièrement sur la théorie des Anamorphoses.

Il avait, entre autres objets de curiosité, dressé un tableau qui, à l'œil nu, représentait le sultan Achmet, alors régnant, et qui, vu à travers un verre d'une forme convenable, reproduisait les traits de Louis XIII.



LÉOPOLD DE MÉDICIS.

(Né vers 1613.)

Cardinal, frère de Ferdinand II de Toscane.

Il fonda, en 1657, à Florence, l'Académie del Cimento (Académie de l'Expérience), et traça lui-même le plan de ses recherches; il recommanda aux académiciens qu'il avait institués de s'inspirer des idées et des méthodes de Galilée.

Les physiciens de Florence publièrent leurs recherches en 1667, sous le titre d'*Essais*. Ces *Essais* ont été traduits en latin par Muschenbroeck.

Voici les principales expériences relatées dans cet ouvrage : le tube de Torricelli étant terminé à sa partie supérieure par un ballon de verre assez spacieux, on y introduisait une petite vessie fermée, qui se gonflait lorsque le mercure était descendu; on y enflammait au moyen d'un miroir ardent une petite pastille combustible, et la fumée produite tendait à se précipiter vers le bas; une aiguille d'acier était attirée par l'aimant comme si le ballon eût été

plein d'air. On connaît l'expérience sur l'incompressibilité apparente de l'eau qui met en évidence la porosité des métaux les plus finement travaillés, l'or et l'argent. L'Académie del Cimento se proposa ensuite de vérifier l'assertion de Galilée que l'eau en se congelant devait se dilater, puisqu'elle surnageait. L'expérience journalière des vases en verre ou en terre que nous voyons se casser en hiver, lorsqu'on y a oublié de l'eau, cette expérience ne paraissait pas concluante, parce que la cassure pouvait être attribuée au froid; les Académiciens de Florence la répétèrent sur des sphères creuses de cuivre, d'argent ou d'or qui se rompaient comme verre. Ils employaient pour produire la congélation de l'eau un mélange réfrigérant de neige et de muriate d'ammoniaque. Boyle faisait en même temps les mêmes expériences en Angleterre; mais les Académiciens de Léopold voulurent connaître le rapport des densités de la glace et de l'eau, et trouvèrent que ce rapport est celui de 8 à 9.

Ils perfectionnèrent le thermomètre, mais sans recourir, pour la graduation, à des points nettement déterminés. Ils construisirent aussi le premier hygromètre, formé d'un ballon de verre rempli de glace pilée et sur la surface extérieure duquel la vapeur d'eau contenue dans l'atmosphère venait se condenser en plus ou moins grande quantité, selon son abondance. Ils confirmèrent l'opinion de Gassendi que tous les sons se propagent avec la même vitesse. Ils trouvèrent que la densité de l'air est à celle de l'eau comme 1 est à 7853, résultat bien moins inexact que ceux qui avaient été adoptés auparavant.



CLERSELLIER (CLAUDE).

(Né vers 1614, mort à Paris vers 1686.)

Il était depuis longtemps lié avec Descartes; à la mort du Père Mersenne, Descartes choisit Clersellier pour son correspondant en France.

Clersellier était avocat au Parlement de Paris. Ce fut lui qui recueillit et publia les écrits posthumes de Descartes, trois volumes de lettres, puis le *Traité de l'homme*, le *Traité de la formation du fœtus*, le *Traité de la lumière* et le *Traité du monde* (Paris, 1667).

VAN HEURAET.

(Né en Hollande en 1615.)

Il est le premier qui ait conçu d'une manière générale l'identité des deux problèmes de la rectification et de la quadrature des courbes. Il enseigna la manière de former l'équation de la courbe dont l'aire devait avoir même mesure que la longueur d'une courbe donnée.

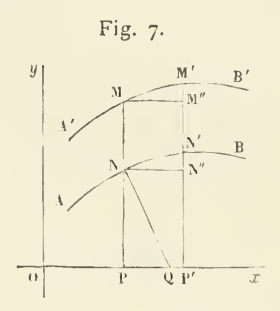
Sa découverte a été revendiquée par Wallis en faveur de Neil, qui avait auparavant rectifié la parabole cubique $y^3 = ax^2$; mais Neil n'avait pas, comme Van Heuraët, envisagé le problème dans toute sa généralité.

Voici la méthode indiquée par Van Heuraët :

Soit AB la courbe qu'il faut rectifier; il s'agit de trouver une autre courbe A′B′ telle que l'élément de son aire, MPP′M′, soit égal au rectangle compris sous l'élément NN′ de la longueur de AB, et sous une ligne arbitraire h, de façon que le rectangle

compris sous la ligne h et un arc indéfini de AB étant égal à l'aire du segment de A'B', compris entre les mêmes ordonnées, l'arc de AB soit égal à la quatrième proportionnelle à h et aux deux dimensions du segment.

Fig. 7.



Soient NQ (*fig.* 7) la normale en N à AB, x et y les coordonnées du point N, Y l'ordonnée MP de la courbe cherchée, Van Heuraët dit que Y sera fourni par la proportion

$$\frac{Y}{h} = \frac{NQ}{y},$$

ce qui est rendu évident par la proportion

$$NN' : NN'' :: NQ : NP.$$

Il y a, sur cette manière de présenter la solution du problème, deux remarques à faire : la première, que, même après Descartes, les géomètres éprouvent encore une certaine répugnance non seulement à ne pas introduire directement les grandeurs géométriques dans leurs formules, mais même à faire intervenir l'unité concrète imaginée par notre illustre philosophe; pour éviter l'intrusion des nombres, ils préfèrent encore les méthodes de calcul d'Apollonius et de Pappus; la seconde est qu'ils paraissent refuser

à la Trigonométrie une place honorable en Géométrie. En effet, Van Heuraët aurait bien pu remplacer $\frac{NQ}{NP}$ par l'inverse du cosinus de l'angle de la tangente en N à AB, avec l'axe des x, ou, plutôt, ne pas remplacer le cosinus de cet angle, auquel il a dû songer d'abord, par le rapport de l'ordonnée à la normale, idée qui, sans doute, n'a dû lui venir qu'après coup.

Il semble que la Trigonométrie, à cette époque, ne fasse pas encore partie de la Science; elle appartient à l'art pratique. Les géomètres l'abandonnent aux astronomes, qui sont bien obligés de se contenter de valeurs approchées.

Nous verrons qu'Huyghens n'y recourt pas plus que Van Heuraët, même dans le calcul du rayon de courbure, ce qui, au reste, ne rend pas sa démonstration plus claire.

WALLIS (JOHN).

(Né à Ashford en 1616, mort à Londres en 1703.)

Il fit ses études à Cambridge et embrassa ensuite la carrière ecclésiastique. Quoique opposé aux doctrines des indépendants, il fut, en 1649, nommé à la chaire de Géométrie, fondée à l'Université d'Oxford par le chevalier Saville. A la Restauration, Charles II le confirma dans son poste et le nomma, en outre, garde des archives de l'Université. Wallis fut l'un des fondateurs et des premiers membres de la Société royale de Londres, et l'un des créateurs de l'enseignement des sourds-muets. Ses ouvrages mathématiques ont été publiés sous le titre : *J. Wallisii opera mathematica* (1697-1699, 3 vol.). Un quatrième volume, conte-

nant ses ouvrages théologiques ou de morale, a été ajouté depuis à l'édition première.

Les ouvrages mathématiques de Wallis sont : *Traité analytique des sections coniques; Algèbre*, précédée d'une histoire de cette Science; *Arithmétique des infinis* (*Arithmetica infinitorum, sive nova methodus inquirendi curvilineorum quadraturam*, etc.), publiée en 1655, vingt ans, par conséquent, après l'apparition des indivisibles de Cavalieri, mais trois ans avant l'ouverture du premier concours proposé par Pascal sur la cycloïde; *De cycloïde et cissoïde; De curvarum rectificatione et complanatione* (1659); *De centro gravitatis* (1669); *Traité du mouvement* (1670), et un grand nombre d'opuscules.

Le *Traité analytique des sections coniques* de Wallis est le premier ouvrage où ces courbes aient été considérées non plus comme sections d'un cône, mais comme courbes du second degré, d'après la méthode des coordonnées de Descartes; toutes leurs propriétés y sont déduites de leur définition analytique. Wallis, dans cet ouvrage, rend implicitement hommage à notre philosophe, quoiqu'il ne l'aimât guère, comme il l'a prouvé par l'injuste partialité qu'il a montrée à son égard dans son histoire de l'Algèbre, où, qualifiant à regret d'*assez belle* la fameuse règle des signes, il accuse aussitôt après Descartes de plagiat envers Harriot, pour n'avoir pas reporté à ce géomètre anglais la découverte de la composition des coefficients en fonction des racines, découverte dont l'honneur revient bien plus légitimement à Viète.

L'*Arithmétique des infinis* est le grand œuvre de Wallis; elle fit faire à la Géométrie des progrès considérables dans toutes les questions qui sont aujourd'hui du domaine du Calcul intégral.

Cavalieri, Fermat, Descartes, Roberval avaient obtenu la formule de quadrature d'une parabole de degré quelconque $y = x^m$, m étant entier et positif.

Mais c'est Wallis qui a donné le premier une démonstration à peu près générale de cette formule, et nous allons d'abord indiquer la manière dont il y arrive.

La question est de comparer l'aire du segment de la parabole

$$y = \frac{x^m}{a^{m-1}},$$

compris entre l'axe des y et une ordonnée quelconque de la courbe, à celle du rectangle qui aurait pour côtés la même ordonnée et l'abscisse correspondante.

Si l'abscisse du dernier point de l'arc considéré est divisée en un très grand nombre n de parties égales, et que l'une de ces parties soit h, l'un des éléments de l'aire du segment sera

$$\frac{h^m}{a^{m-1}} p^m h,$$

p désignant un nombre quelconque compris entre o et n; d'un autre côté, l'élément correspondant du rectangle sera toujours

$$\frac{h^m}{a^{m-1}} n^m h.$$

Le segment sera donc représenté par

$$\frac{h^{m+1}}{a^{m-1}} \Sigma_0^n p^m,$$

tandis que le rectangle le sera par

$$\frac{h^{m+1}}{a^{m-1}} n . n^m;$$

par suite, le rapport cherché est la limite vers laquelle tend

$$\frac{\Sigma_0^{n-1} p^m}{n.n^m}$$

lorsque n croît indéfiniment, ou celle de

$$\frac{\Sigma_0^n p^m}{(n+1)n^m},$$

si, comme le fait Wallis, on compte aussi les deux éléments qui commencent à l'abscisse nh.

Pour faire le calcul, nous prendrions simplement la formule

$$(n+1)^{m+1} = (m+1)S_m + \frac{(m+1)m}{1.2}S_{m-1} + \ldots,$$

qui donne la somme S_m des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des n premiers nombres entiers, en fonction des sommes des puissances moindres des mêmes nombres, et nous en tirerions immédiatement, pour le cas où n deviendrait infini,

$$\frac{S_m}{(n+1)n^m} = \frac{1}{m+1},$$

parce que les quotients des sommes S_{m-1}, S_{m-2}, par $(n+1)n^m$, tendraient tous vers zéro.

C'est, en effet, ce que trouve Wallis; mais il y arrive d'une façon très pénible, non parce qu'il ne connaît pas la formule du développement de la puissance $(m+1)$ d'un binôme, car il lui suffirait d'en connaître les deux premiers termes, mais parce qu'il ne fait pas le calcul algébriquement : il prend, pour chaque valeur de m, une série d'exemples numériques, en donnant à n successivement différentes valeurs, et calcule chaque fois le rapport

cherché, qui se trouve toujours être $\frac{1}{m+1}$, augmenté d'une fraction ayant pour numérateur 1 et pour dénominateur un nombre qui augmente indéfiniment avec n.

En résumé, Wallis démontre d'une façon à peu près suffisante que l'aire de la parabole

$$a^{m-1}y = x^m,$$

comprise entre la courbe, l'axe des x, l'axe des y et l'ordonnée correspondante à l'abscisse x, est

$$\frac{1}{m+1}\frac{x^m . x}{a^{m-1}},$$

puisque le rectangle auquel on l'a comparée avait pour côtés $\frac{x^m}{a^{m-1}}$ et x, et que le rapport est $\frac{1}{m+1}$.

Mais on ne trouvera plus, dans ce qui va suivre, que des affirmations sans preuves. Toutefois, les propositions seront exactes, ce qui est le principal. Car une invention heureuse, même imparfaitement justifiée, est toujours plus méritoire que toutes les démonstrations qui viennent ensuite la confirmer.

Wallis remarque d'abord, proposition XLVI (il y en a quarante-cinq pour ce qui précède), que : « *Data ratione quam habet series una, cujuslibet potestatis, ad seriem æqualium, reperitur ratio quam habet alia series alterius cujusvis potestatis ad seriem item æqualium : inveniendo nempe homologum terminum progressionis arithmeticæ.* » C'est-à-dire : Lorsqu'on a trouvé la raison de la somme prolongée indéfiniment des puissances semblables et entières des n premiers nombres entiers, à la somme d'autant de termes égaux au dernier, on a, par cela même, la raison de la somme d'autres puissances semblables des mêmes

premiers nombres à la somme d'autant de termes égaux au dernier de la nouvelle série; car il suffit, pour cela, de prendre le terme correspondant de la progression arithmétique.

Par exemple : « *Si series quartanorum rationem habeat, ad seriem æqualium, eam quæ est* 1 *ad* 5 *sive* $\frac{1}{5}$; *series sextanorum habebit rationem* 1 *ad* 7 : *quia in progressione arithmetica ubi terminus post unitatem quartus est* 5, *terminus sextus erit* 7. » C'est-à-dire : Si la somme des quatrièmes puissances est dans le rapport de 1 à 5 avec la somme d'autant de termes égaux au dernier de la série, la somme des sixièmes puissances sera dans le rapport de 1 à 7 avec la somme d'autant de termes égaux au dernier de la nouvelle série; parce que, dans une progression arithmétique où le quatrième terme après l'unité est cinq, le sixième est sept.

« *Atque* (Proposition XLVII) *hæc regula non minus valebit si exponatur series quantitatum quarumlibet* (*non quidem juxta seriem primanorum, sed*) *juxta quamvis aliam Tabellæ seriem, et de illarum quadratis, cubis, etc., inquiratur.* » C'est-à-dire : Et cette règle sera tout aussi bien applicable s'il s'agit d'une somme de puissances quelconques, non, à la vérité, à l'égard de la somme des premières puissances, mais à l'égard d'une somme quelconque contenue dans la Table (des raisons trouvées plus haut et dont la formule générale, que ne donne pas Wallis, est $\frac{1}{m+1}$) et à l'égard de la somme des quarrés, des cubes, etc., des termes de la somme considérée.

« Par exemple, la raison, pour la somme des quarrés (*secundanorum*) est celle de 1 à 3 : elle sera de 1 à 5 pour la somme des

quarrés de ces quarrés, de 1 à 7 pour la somme de leurs cubes, *et sic deinceps* (et ainsi de suite), parce que, à la progression géométrique

Unitas, *radix*, *quadratum*, *cubus*, etc.,

correspond la progression arithmétique

1, 2, 3, 4, etc.

« Ce que l'on peut vérifier sur la table, car la somme des quarrés des quarrés est la somme des quatrièmes puissances (*quartanorum*) et celle des cubes des quarrés est celle des sixièmes puissances (*sextanorum*), et les raisons qui leur conviennent sont celles de 1 à 5 et de 1 à 7. »

Tout cela pourrait paraître un peu naïf, car ce n'est que la traduction de cette identité que, si

$$m = m'm'',$$

$$\frac{1}{m+1} = \frac{1}{m'm''+1}.$$

Mais ce n'est pas en vue du fait lui-même que Wallis énonce si longuement cette règle; c'est pour l'étendre, par analogie, au cas de la somme prolongée indéfiniment des racines de même indice des puissances semblables et entières des n premiers nombres entiers.

Pour cela, il commence par remarquer, proposition LI, que : « *Si exponatur series quantitatum quarumlibet, juxta quamlibet Tabellæ seriem ; de illarum radicibus quadratis, cubicis, etc., aut quibusvis intermediis potestatibus, pariter inquirendum erit.* » C'est-à-dire : si l'on considère la somme de grandeurs d'une même nature formant une des séries contenues

dans la Table, on pourra passer de cette somme à celle des racines quarrées. cubiques, etc., de ses termes.

Par exemple : « *Si exponantur infinita numero quadrata* (*vel quælibet plana similia*), *juxta seriem quartanorum* (*cui assignatur, in Tabella, ratio* 1 *ad* 5) : *series laterum* (*vel rectarum in illis similiter positarum*) *rationem habebit* (*ad seriem æqualium*) 1 *ad* 3 : *quia* 1, 3, 5 *sunt arithmetice proportionalia, vel etiam quia ubi plana sunt series quartanorum, eorum latera erunt series secundanorum, quibus assignatur in Tabella ratio* 1 *ad* 3. » C'est-à-dire : si l'on considère la somme de quarrés en nombre infini (ou de figures planes semblables quelconques) formant une série proportionnelle à celle des quatrièmes puissances des nombres, telle que

$$0a^2,\quad 1a^2,\quad 16a^2,\quad 81a^2,\quad 256a^2, \text{etc.},$$

pour laquelle la Table assigne une raison égale à celle de 1 à 5, la somme des côtés (ou des lignes homologues) qui formeront la série

$$0a,\quad 1a,\quad 4a,\quad 9a,\quad 16a, \text{etc.},$$

aura (avec la somme d'autant de termes égaux au dernier, n^2a) la raison de 1 à 3, parce que 1, 3, 5 sont en progression arithmétique (c'est la preuve que Wallis préfère, dans l'intérêt de sa théorie) ; ou bien (ce qui constitue une vérification de cette preuve), parce que, si les figures planes sont comme les quatrièmes puissances des nombres entiers, leurs lignes homologues seront comme les quarrés de ces nombres, et que la Table, alors, donnera pour raison celle de 1 à 3.

De même, si les quarrés considérés formaient une série propor-

tionnelle à celle des sixièmes puissances des nombres, leurs côtés formeraient une série proportionnelle à celle des cubes des nombres et la raison qui conviendrait à la somme de ces côtés, comparée à celle d'un nombre égal de côtés égaux au dernier, serait celle de 1 à 4, parce que, entre 1 et 7, la moyenne arithmétique est 4.

De même si, au lieu de quarrés ou de figures planes semblables, on considérait des cubes ou des polyèdres semblables.

Wallis arrive alors, propositions LIII et LIV, au théorème qu'il avait en vue et qui concerne la détermination de la limite vers laquelle tend le rapport

$$\frac{\Sigma_0^n \sqrt[m]{n}}{(n+1)\sqrt[m]{n}}$$

lorsque n croît indéfiniment.

« *His intellectis, patet aditus ad investigationem rationum quas (ad seriem maximæ æqualium) habere dicantur ejusmodi series radicum quadraticarum, cubicarum, biquadraticarum, etc., numerorum sive quantitatum arithmetice proportionalium, a puncto vel* o *inchoatarum, quas appello series subsecundanorum, subtertianorum, subquartanorum, etc.* » C'est-à-dire : cela posé, la marche à suivre pour trouver les raisons des sommes prolongées indéfiniment des racines quarrées, cubiques, quatrièmes, etc., des premiers nombres entiers, aux sommes de pareils nombres de termes égaux aux derniers, dans chaque série, est maintenant évidente : ces raisons seront,

pour la série des racines carrées, $\frac{2}{3}$ (*subsecundanorum*);
pour la série des racines cubiques, $\frac{3}{4}$ (*subtertianorum*);
pour la série des racines quatrièmes, $\frac{4}{5}$ (*subquartanorum*);

pour la série des racines cinquièmes, $\frac{5}{6}$ (*subquintanorum*);
pour la série des racines sixièmes, $\frac{6}{7}$ (*subsextanorum*);

. . . .

pour la série des racines dixièmes, $\frac{10}{11}$ (*subdecimanorum*), *et sic deinceps* (et ainsi de suite).

La seule preuve qu'en donne Wallis est : « *Patet ex præcedente.* » (Cela est évident d'après la proposition précédente.)

A partir de là, *patet* revient à chaque instant et tient lieu de toute démonstration; mais on ne peut s'empêcher d'admirer la sagacité avec laquelle Wallis découvre des règles si justes.

La limite vers laquelle tend le rapport

$$\frac{\Sigma_o^n \sqrt[m]{n}}{(n+1)\sqrt[m]{n}},$$

lorsque n tend ver sl'infini, est donc

$$\frac{m}{m+1};$$

il en résulte que l'aire de la parabole,

$$y = a\sqrt[m]{\frac{x}{a}},$$

est la fraction $\frac{m}{m+1}$ de l'aire du rectangle

$$a\sqrt[m]{\frac{x}{a}}\,x;$$

ce qui est parfait.

Wallis passe ensuite au cas où il s'agirait de comparer la somme prolongée indéfiniment des puissances semblables des racines de même indice des n premiers nombres entiers, à la

somme d'autant de termes égaux au dernier de la série; c'est-à-dire où la question serait de trouver la limite du rapport

$$\frac{\Sigma_0^n n^{\frac{p}{q}}}{(n+1) n^{\frac{p}{q}}}.$$

Il y arrive aisément par la combinaison des principes précédents et forme la table à double entrée des valeurs du rapport, en portant sur l'un des côtés les degrés des puissances et sur l'autre les indices des racines.

Enfin, après avoir (proposition LXIV) attaché à la série des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines $q^{\text{ièmes}}$, l'indice $\frac{p}{q}$, il arrive à la formule générale : « *Si intelligatur series infinita quantitatum, a puncto seu* o *inchoatarum, et continue crescentium pro ratione cujuscumque potestatis, sive simplicis, sive ex simplicibus compositæ; erit totius ratio, ad seriem totidem maximæ æqualium, ea quæ est unitatis ad indicem istius potestatis unitate auctum.* » C'est-à-dire : si l'on considère la somme, prolongée indéfiniment, des puissances simples, ou composées des simples, des nombres entiers à partir de zéro, la raison de cette somme à la somme d'autant de termes égaux au dernier de la série sera celle de l'unité à l'indice de la série augmenté de un.

Il est curieux de remarquer qu'il va même jusqu'à supposer l'indice irrationnel : « *Sin index supponatur irrationalis, puta* $\sqrt{3}$; *erit ratio, ut* 1 *ad* $1+\sqrt{3}$, etc.. » c'est-à-dire : si l'indice est supposé irrationnel, par exemple $\sqrt{3}$, la raison sera celle de 1 à $1+\sqrt{3}$, etc.

Tout cela est assurément très beau.

Mais Wallis va encore plus loin : l'heureuse idée lui vient de prolonger la série des exposants au-dessous de zéro et de considérer les sommes, prolongées indéfiniment, des puissances négatives, entières ou fractionnaires des nombres entiers, pour arriver à quarrer les courbes

$$y = a\frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^m} = a\left(\frac{x}{a}\right)^{-m}$$

et

$$y = a\frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{p}{q}}} = a\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{p}{q}};$$

mais là il est un peu moins heureux. Il applique encore la règle générale, énoncée dans ce qui précède; mais il ne peut interpréter les résultats auxquels il arrive, ce qui ne doit pas surprendre, sa méthode l'obligeant à faire commencer l'aire à l'axe des y, de façon à ne pouvoir écarter la difficulté principale.

Par exemple, la formule générale de quadrature, appliquée à l'hyperbole du second degré,

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1},$$

lui donne

$$\frac{x^0}{0}.$$

Wallis en conclut très bien que l'aire comprise entre la courbe et son asymptote est infinie, mais il ne peut aller plus loin.

Quant aux cas où l'exposant de x au dénominateur est supé-

rieur à 1, comme dans

$$y = \frac{1}{x^3} = x^{-3},$$

l'analogie donnait, pour l'aire cherchée,

$$\frac{x^{-2}}{-2} = \frac{xy}{-2},$$

et Wallis ne sut pas se tirer de ce signe —. Il fait à ce sujet un singulier raisonnement : si le dénominateur, dit-il, n'était que zéro, l'aire serait déjà infinie, mais il est moindre que zéro, l'aire est donc plus qu'infinie : « *cum indices serierum secundanorum, tertianorum, quartanorum, etc., sint* 2, 3, 4, *etc.* (*unitate majores*), *indices serierum illis reciprocarum erunt* — 2, — 3, — 4, *etc., qui, quamvis unitate augeantur, manebunt tamen negativi; et, propterea ratio quam habet* 1 *ad indices illos sic auctos, major erit quam infinita, sive* 1 *ad* 0; *quia nempe rationum consequentes sunt minores quam* 0.

On est naturellement porté, à propos de cet étonnant travail de Wallis, à remarquer la singulière tendance de l'esprit humain à prolonger l'usage des méthodes antérieurement usitées, je ne dirai pas autant que possible, ce qui serait encore rationnel, mais au delà même du point où leur domaine s'arrête. Il semble qu'on ne puisse se décider à chercher de nouvelles méthodes que sous le fouet de l'absurde.

Il eût assurément été plus facile de rechercher les incréments des fonctions élémentaires, pour remonter aux sommes correspondantes, que de sortir, comme Wallis l'a si heureusement fait souvent, des difficultés où il se lançait.

La manière dont Wallis parvint à sa formule du rapport de la

circonférence au diamètre est tout à fait extraordinaire. Il remarque que les aires comprises entre l'axe des y, la parallèle à cet axe menée à la distance $x = 1$, l'axe des x et les courbes représentées par les équations

$$y = (1 - x^2)^0, \quad y = (1 - x^2)^1,$$
$$y = (1 - x^2)^2, \quad y = (1 - x^2)^3, \quad \ldots,$$

sont exprimées, en fonction du rectangle circonscrit, ayant pour côtés $x = 1$ et $y = 1$, par les fractions

$$1, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{8}{15}, \quad \frac{48}{105}, \quad \ldots,$$

et, comme l'ordonnée du cercle

$$y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

serait moyenne proportionnelle entre les deux premiers termes de la suite

$$(1 - x^2)^0, \quad (1 - x^2)^1, \quad (1 - x^2)^2, \quad \ldots,$$

il se propose le problème de l'interpolation d'un terme entre 1 et $\frac{2}{3}$, sous la condition de satisfaire à la loi de formation de la suite

$$1, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{8}{15}, \quad \frac{48}{105}, \quad \ldots,$$

loi non formulée du reste et définie seulement par son origine concrète. Wallis y parvient, mais par une analyse trop compliquée pour trouver place ici. Il trouve que $\frac{\pi}{2}$ est la limite du

rapport

$$\frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9\ldots}.$$

Il n'était pas très satisfait de ce résultat, quoique entièrement neuf, et il excita lord Brouncker, son ami, à chercher encore mieux. C'est sous l'inspiration de Wallis que ce dernier savant trouva pour π l'expression

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \ldots}}}}},$$

qui donna lieu à la naissance de la théorie des fractions continues.

Nous venons de dire que Wallis avait cherché à déterminer l'aire du cercle par l'interpolation d'un terme entre 1 et $\frac{2}{3}$ dans la série

$$1, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{8}{15}, \quad \frac{48}{105}, \quad \ldots;$$

nous devons ajouter que c'est lui qui, le premier, considéra le problème de l'interpolation et même en imagina le nom. Il en donna la solution générale qui consiste, lorsque les valeurs données ne sont liées par aucune loi connue, à faire passer par les points dont les coordonnées sont les valeurs données de la variable et de sa fonction, la parabole du degré marqué par le nombre de ces points moins un.

On doit encore à Wallis l'idée d'une méthode pour la rectifi-

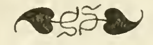
cation des courbes. Il remarqua, en effet, qu'en ajoutant le quarré de la différence entre deux ordonnées consécutives d'une courbe au quarré de la différence constante entre les abscisses, et prenant la racine quarrée de la somme, on trouvait l'expression du rectangle élémentaire, partie infiniment petite de l'aire d'une autre courbe, en sorte que le problème était ramené à quarrer cette autre courbe, mais il ne fit pas d'application de cette idée qui avait été présentée sous une forme moins heureuse par Van Heuraët.

Pascal avait, au commencement de 1658, adressé publiquement un défi scientifique à tous les géomètres; il offrait 40 pistoles à qui trouverait, avant le 1er octobre de la même année, l'aire d'un segment de la cycloïde déterminé par une ordonnée quelconque parallèle à sa base, le centre de gravité de cette aire et le volume qu'elle engendrerait en tournant soit autour de sa base, soit autour de son ordonnée; la longueur d'un arc quelconque de la courbe et le centre de gravité de cet arc. Wallis envoya de presque tous ces problèmes des solutions obtenues par la méthode des infinis, qui parvinrent le 23 septembre, mais qui n'étaient pas toutes exactes ou, au moins, contenaient des erreurs, de calcul probablement.

Wallis appliqua encore dans la suite sa méthode à la quadrature de la cissoïde et de la conchoïde de Nicomède, à la rectification de la parabole, et à un grand nombre de questions relatives aux centres de gravité.

On sait combien Descartes s'était trompé dans la théorie du choc. La question fut mise au concours par la Société royale de Londres. Wallis, Wren et Huyghens en envoyèrent simultanément des solutions analogues, fondées sur le même principe, qui

prit dès lors place dans la Science sous le nom de principe de la conservation de la quantité de mouvement. Wallis se borna au cas des corps mous; Wren et Huyghens, au contraire, avaient considéré exclusivement celui des corps parfaitement élastiques.



SARASSA (ALPHONSE-ANTOINE DE).

[Né à Nieuport (Flandre) en 1618, mort à Anvers en 1667.]

Il appartenait à une famille espagnole qui le fit entrer à quinze ans dans l'ordre des Jésuites. Il professa d'abord les humanités, puis les Mathématiques.

Disciple de Grégoire de Saint-Vincent, Sarassa le défendit avec vivacité contre les attaques du père Mersenne et de Huyghens. Il démontra, dans un opuscule intitulé *Solutio problematis a R. P. Mersenno propositi*, que la quadrature du cercle de Grégoire de Saint-Vincent était juste si l'on admettait que, connaissant trois grandeurs et les logarithmes de deux d'entre elles, on pouvait construire le logarithme de la troisième.

Le père Sarassa est l'auteur d'un ouvrage intitulé : *Ars semper gaudendi*, qu'estimait Leibniz, mais qui, à ce qu'il paraît, est fort peu réjouissant. Il en existe une traduction française qui a été publiée à Strasbourg.

MOUTON (GABRIEL).

(Né à Lyon en 1618, mort en 1694.)

Il fut d'abord vicaire, puis prébendier; il était docteur en Théologie.

Il a calculé les logarithmes à dix décimales des sinus et tangentes de tous les angles de 0° à 4°, de seconde en seconde. Ils se trouvent dans les Tables de Gardiner et ont été reproduits dans celles de Callet. Il imagina pour ce calcul la méthode des différences qui peut servir à l'établissement de Tables de toutes sortes. Cette méthode, purement instinctive chez Mouton, a, comme on sait, attiré l'attention de Newton, qui en a donné la théorie. C'est l'origine de notre méthode d'interpolation.

Mouton est surtout connu par les *Observationes diametrorum Solis et Lunæ apparentium* (Lyon, 1670). Il suivait sur un carton l'image de l'astre au moment de son passage au méridien et estimait le temps employé au passage, par le nombre des oscillations d'un pendule préalablement réglé. Le temps écoulé, converti en degrés, en tenant compte de la déclinaison de l'astre et de son mouvement propre, fournissait le diamètre.

Il avait imaginé, pour le Soleil en particulier, une autre méthode assez ingénieuse. Il mesurait sur le carton, à quelques jours d'intervalle, d'abord le diamètre de l'image, et ensuite la distance parcourue, dans le sens vertical, par le bord supérieur, par exemple : le diamètre et la distance observés devaient être proportionnels au diamètre apparent et à la variation du Soleil en déclinaison, dans l'intervalle des deux observations. Cette variation étant donc fournie par les Tables, une proportion très simple lui faisait connaître le diamètre apparent. Il trouva, pour le diamètre du Soleil 31′ 30″,67 à l'apogée et 32′ 29″,67 au périgée. Les vraies valeurs sont 31′ 31″ et 32′ 35″,6.



GRIMALDI (FRANÇOIS-MARIE).

(Né à Bologne en 1618, mort en 1663.)

Il appartenait à l'ordre des Jésuites. Il professa successivement la Rhétorique, la Philosophie et la Géométrie dans les maisons de son ordre. Il s'occupa aussi d'Astronomie à laquelle il fit faire quelques progrès. Son principal titre consiste dans la découverte de la diffraction.

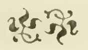
L'ouvrage où il a consigné ses recherches sur la lumière est intitulé : *Physico-Mathesis de lumine coloribus et iride, aliisque annexis, libri duo* (Bologne, 1663).

Sa découverte fut d'ailleurs toute fortuite et se réduisait à la constatation intelligente du fait.

Il avait placé par hasard un cheveu devant le petit trou par lequel la lumière solaire devait pénétrer dans une chambre obscure, et fut tout étonné de voir que ce cheveu projetait une ombre d'un largeur beaucoup plus grande que la sienne propre; il prit, tant bien que mal, les mesures de l'une et de l'autre pour s'assurer qu'il ne se trompait pas, varia les expériences et donna le nom de diffraction à l'influence subie par les rayons lumineux lorsqu'ils rasent la surface d'un corps; ce nom a été conservé.

Le Père Grimaldi avait aussi observé le phénomène de la dispersion de la lumière après son passage à travers le prisme, mais il ne soupçonna pas l'inégale réfrangibilité des couleurs.

Hévélius avait donné aux montagnes de la Lune les noms des pics terrestres; Grimaldi leur a assigné les noms qui, pour la plupart, sont encore en usage aujourd'hui.



HORROX OU HORROCKS (JÉRÉMIE).

(Né à Toxtetts près Liverpool en 1619, mort en 1641.)

Une touchante amitié le liait à Crabtée, qui ne lui survécut que peu de jours, d'après Weidler. Ses œuvres, publiées par Waliis en 1673, ne contiennent que les papiers trouvés chez lui à sa mort et la correspondance des deux amis. Un opuscule, *Venus in sole visa*, qu'il avait fait imprimer en 1639, n'avait pu être retrouvé. Hévélius le réimprima à la suite de son *Mercure vu sur le Soleil.*

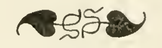
Les vues développées dans les lettres d'Horrocks promettaient un grand astronome. Il n'eut malheureusement pas le temps de remplir ces promesses.

Son observation du passage de Vénus sur le Soleil est remarquable. A défaut du micromètre qui n'était pas encore inventé, il trace sur un carton un cercle d'un demi-pied de diamètre environ, que l'image du Soleil dans la chambre obscure doit recouvrir exactement. Le diamètre de ce cercle est divisé en 120 parties. Vénus passant sur le disque devait former tache sur l'image et le diamètre de cette tache comparé à celui du disque ferait connaître le diamètre apparent de la planète.

Il trouva 1′20″, valeur sensiblement trop grande.

Le principal mérite d'Horrocks est d'avoir su, le premier en Angleterre, apprécier pleinement Képler et de l'avoir fait connaître.

Outre l'ouvrage dont nous venons de parler, il a laissé : *Astronomia Kepleriana defensa et promota*, qui fut publiée en 1672.



CRABTÉE ou CRABTRÉE (WILLIAM).

(Contemporain et ami d'Horrocks.)

Il a proposé pour la mesure des diamètres apparents des astres une méthode bien supérieure à celles de Tycho et de Képler, mais qui fut aussitôt remplacée par celle d'Auzout et de Picard.

Pour obtenir, par exemple, la mesure du diamètre apparent du Soleil, il plantait deux aiguilles perpendiculairement au plan d'une règle divisée, plaçait la règle horizontalement sur deux supports, dans une direction perpendiculaire à celle dans laquelle l'astre se présentait, et s'éloignait ensuite jusqu'à ce que les deux aiguilles parussent à l'un de ses yeux tangentes aux deux bords du disque. En mesurant avec soin la distance de l'œil au milieu de la portion de la règle comprise entre les deux aiguilles, on pouvait, par un calcul très simple, obtenir le diamètre apparent de l'astre.

Robert Grant croit qu'il ne mourut qu'en 1652.

SCHOOTEN (FRANÇOIS).

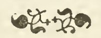
(Né vers 1620, mort en 1661.)

Il était professeur à Leyde lorsque parut la *Géométrie* de Descartes. Il en donna, en vue de la répandre dans les autres pays, une traduction en latin, avec commentaires, qui parut en 1649 et fut suivie, en 1659, d'une seconde édition enrichie des notes de de Beaune, d'opuscules de Hudde sur la réduction des équations et sur les maximums; d'un autre de Van Heuraët sur la rectification des courbes, de ceux de de Beaune sur les limites des

racines des équations; d'une note de de Witt, et, enfin, d'un Traité de Schooten lui-même, intitulé : *De concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebrico.*

Schooten a, en outre, laissé : *Exercitationes mathematicæ* (1646) et *De organica sectionum conicarum descriptione.*

C'est à lui que nous devons la seule édition qui existe des œuvres de Viète, qu'il eut beaucoup de peine à rassembler.



LORD BROUNCKER (GUILLAUME), VICOMTE DE CASTELLYONS.

(Né en 1620, mort en 1684.)

Il fut chancelier de la cour, garde du sceau et commissaire de la Tour. Il fut le premier président de la Société royale de Londres.

Nous avons donné, à l'article relatif à Wallis, la formule que trouva lord Brouncker pour la valeur de π. Il chercha aussi la quadrature du segment d'une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes, compris entre les abscisses 1 et 2, et trouva

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{7.8}+\frac{1}{9.10}+\ldots.$$



MERCATOR (NICOLAS).

[Né près de Cismar (Holstein) vers 1620, mort à Paris en 1687.]

Son véritable nom est Kauffmann, dont Mercator est la traduction latine. Il passa en Angleterre vers 1660 et s'établit

ensuite en France, où il travailla aux embellissements de Versailles.

Il est célèbre par sa découverte de la série logarithmique

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

démontrée dans sa *Logarithmotechnia* (Londres, 1668). Il a laissé aussi : *Institutionum astronomicarum libri duo* (Londres, 1676) et *Cosmographia sive descriptio cœli et terræ* (1651).

Voici comment il trouva la série logarithmique : on savait, depuis Grégoire de Saint-Vincent, que l'aire d'un segment d'hyperbole équilatère entre ses asymptotes, compté du sommet, est le logarithme de l'abscisse. Mercator remarque qu'en prenant pour origine des abscisses le pied de l'ordonnée du sommet, l'ordonnée devient

$$\frac{1}{1+x};$$

il fait la division, ce qui donne la suite

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots,$$

et il passe à l'aire de la courbe par la méthode de Wallis, en quarrant les lignes

$$y = 1, \quad y = x, \quad y = x^2, \quad y = x^3, \quad \ldots.$$

C'est la méthode que suivit d'abord Newton dans son *Tractatus de quadratura curvarum.* Par exemple, pour exprimer l'aire d'un segment du cercle

$$y^2 = 1 - x^2$$

Newton développe en série

$$(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

et quarre toutes les courbes dont les ordonnées seraient les différents termes de la suite obtenue.



PICARD (JEAN).

(Né à la Flèche en 1620, mort à Paris en 1682.)

Prêtre et prieur de Rillé, en Anjou. Il se trouvait déjà, en 1645, en relations scientifiques avec Gassendi, qu'il remplaça, en 1655, dans la chaire d'Astronomie du Collège de France. Il fit partie, avec Carcavi, Huyghens, Roberval, Frenicle, Auzout et Buot du premier noyau de l'Académie des Sciences, que Colbert fonda en 1666. Probe, modeste et soucieux avant tout des intérêts de la Science, il fit venir en France et recommanda à Colbert Rœmer, qui lui resta attaché jusqu'à sa mort, et Cassini, dont l'humeur glorieuse et jalouse s'exerça contre lui en toute occasion, soit pour rabaisser le mérite de ses travaux, soit pour empêcher que le gouvernement ne lui fournît les moyens de faire les recherches dont son intelligente activité lui suggérait les projets.

Le premier titre de Picard à l'estime et à la reconnaissance des astronomes, dit Delambre, est l'application qu'il fit des lunettes à la mesure des angles et le plan qu'il forma, en conséquence, d'un nouveau système d'observations, pour déterminer les lieux apparents de tous les astres, par leurs passages au méridien, à l'aide des horloges nouvellement imaginées par Huyghens. Ce mérite

et celui d'une vie entièrement employée à des travaux utiles ne peuvent être sentis et appréciés que par les astronomes.

L'entreprise qui a le plus contribué à établir la réputation de Picard est sa mesure de la Terre, où il fut aidé par Lahire, mais qui fut exécutée selon ses méthodes, avec des instruments dont il était l'inventeur, et beaucoup plus parfaits que ceux qu'on employait avant lui; il a assez approché du but pour que Newton, qui attendait les résultats de cette grande opération avant d'oser publier sa découverte de la loi de la gravitation universelle, y pût trouver une pleine confirmation de sa théorie.

Fernel, Snellius et Riccioli avaient successivement donné au degré du méridien les longueurs de 56746 toises, 55021 toises et 62900 toises; Picard trouva 57060 toises, résultat trop faible, mais de 14 toises seulement. L'arc de méridien qu'il mesura s'étendait de Sourdon, près d'Amiens, à Malvoisine, au Sud de Paris. Il prit pour base la distance de Villejuif à Juvisy (5663 toises) et relia les extrémités de l'arc par 26 triangles.

La toise dont se servit Picard était celle du Châtelet; cette désignation ne nous la ferait pas connaître aujourd'hui; mais il est remarquable que Picard prit soin de fournir les moyens de la retrouver en la comparant à la longueur du pendule simple qui bat la seconde à Paris. « De peur, dit-il, qu'il n'arrive à cette toise ce qui est arrivé à toutes les anciennes mesures dont il ne reste que le nom, nous l'attacherons à un original, lequel, étant tiré de la nature même, doit être invariable et universel. » C'est, comme on voit, l'idée qui a été mise en pratique d'une autre manière dans l'établissement du système métrique.

Picard prit, dans la mesure de la base qu'il avait choisie, des précautions énormes dont on n'avait jamais eu l'idée; le quart

de cercle dont il se servit portait deux lunettes, l'une fixe, l'autre mobile, et munies de réticules; il avait 38 pouces de rayon et lui donnait les quarts de minute. Picard déterminait l'erreur de collimation par le renversement, méthode qui était neuve alors. Le secteur qu'il employait pour retrouver la méridienne, de distance en distance, avait 10 pieds de rayon et était également muni de lunettes; enfin, le temps sidéral lui était donné par deux horloges à pendule dont l'accord devait garantir l'exactitude. On voit que l'ère des bonnes observations va naître. Picard ne connaissait ni l'aberration ni la nutation, qui ne furent découvertes que soixante ans plus tard; on est étonné, en conséquence, qu'il soit arrivé à une valeur si approchée du degré.

Il est intéressant de noter que les opérations exécutées à cette époque par Picard et Lahire, Cassini et d'autres astronomes, dans toute l'étendue de la France, accusèrent, sur les évaluations admises des distances à Paris des principales villes, des erreurs énormes, qui allaient jusqu'à 30 lieues pour Brest et 15 pour les villes voisines de la frontière d'Espagne.

Les observations de Tycho-Brahé formaient encore, du temps de Picard, le fonds dans lequel puisaient tous les astronomes; mais, pour en faire usage, il fallait connaître exactement la position de son observatoire d'Uranibourg. Picard se décida à faire le voyage. Il partit en juillet 1671. Outre ce qu'il était allé chercher, Picard rapporta une copie des registres de Tycho, faite sur l'original, et des observations qui, comparées à celles de l'astronome danois, mirent sur la voie de la découverte de l'aberration, en signalant de petits déplacements inexplicables de l'étoile polaire.

L'introduction par Picard de l'usage, qui nous paraît aujour-

d'hui si naturel, de munir de lunettes les cercles servant à mesurer les angles, est cependant assez méritoire, car on apercevait si peu, *à priori*, le moyen de fixer la ligne de visée, qu'Hévélius, malgré les explications de Picard, ne put pas être convaincu, et rejeta péremptoirement l'idée de se servir des lunettes autrement que pour aider la vue, au moyen du grossissement des objets.

Les beaux travaux de Picard ne furent pas appréciés comme ils eussent dû l'être de Colbert et de Louis XIV, qui lui préférèrent Cassini pour la direction de l'observatoire qu'on venait d'ériger à si grands frais, mais qui manquait d'instruments. Picard demanda en vain, pendant quatorze ans, qu'on y établît un mural pour faire, comme il l'avait tant recommandé, toutes les observations dans le méridien. Mais Cassini ne prisait pas encore cette méthode, et le mural ne fut dressé qu'après la mort de Picard.

Picard est l'un des hommes qui, sous tous les rapports, font le plus d'honneur à la France.



MARIOTTE (EDME).

(Né près de Dijon vers 1620, mort en 1684.)

Il était prieur de Saint-Martin-sous-Beaune, et fut l'un des premiers membres de l'Académie des Sciences.

Il est en quelque sorte l'instaurateur de la Physique expérimentale en France. Assez versé dans la Géométrie pour s'en aider utilement, et assez philosophe pour ne pas se jeter dans les systèmes, il ne tenta que des expériences qui pussent aboutir

à des conclusions certaines et sut les disposer de manière à les rendre convaincantes.

C'est à lui qu'est due l'idée de l'appareil employé encore aujourd'hui dans tous les cours de physique pour vérifier les lois du choc des corps élastiques. La disposition de cet appareil n'est assurément pas un trait de génie, mais la simplicité des moyens et la sûreté avec laquelle le but est atteint sont assez remarquables.

Tout le monde connaît la loi qu'il a découverte des variations de volume d'une même masse de gaz en raison inverse de la pression. Depuis qu'on a pu liquéfier les gaz, cette loi, que Mariotte pouvait regarder comme rigoureusement exacte, n'a plus été considérée que comme représentant à peu près les faits entre certaines limites. Toutefois MM. Dulong et Arago l'ont vérifiée, pour l'air, jusqu'à une pression de 24^{atm}, à la température ordinaire.

L'ouvrage dans lequel Mariotte avait décrit son expérience est intitulé : *De la nature de l'air.* Il renfermait aussi diverses remarques sur les variations barométriques, dont la théorie n'était pas encore bien comprise de tous les physiciens.

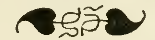
Mariotte s'occupa beaucoup de toutes les questions qui se rattachent à l'Hydrostatique et à l'Hydrodynamique, et il a laissé sur ce sujet un *Traité du mouvement des eaux et des autres corps fluides* que Lahire a publié en 1686. Mariotte s'attachait à y établir solidement la vérité des principes posés par Galilée et Pascal. et à vérifier la loi de Torricelli sur l'écoulement d'un liquide par un orifice percé en mince paroi.

La théorie des curieux phénomènes qu'on produit si simplement à l'aide du flacon de Mariotte suffirait à elle seule pour

assurer au moins la perpétuité du souvenir de cet ouvrage, où l'on trouve encore cette remarque, alors toute nouvelle, que l'eau ordinaire contient toujours un peu d'air en dissolution.

Le recueil des œuvres de Mariotte a été publié à Leyde en 1717 et à la Haye en 1740.

Son éloge a été fait par Condorcet.



LE FÈVRE (NICOLAS).

(Né près de Sedan vers 1620, mort à Londres en 1674.

Il fut élevé à l'Académie protestante de Sedan, vint à Paris occuper un petit emploi, comme chimiste au Jardin du Roi, fut appelé à Londres par Charles II pour diriger le laboratoire de chimie de Saint-James et fit partie de la Société royale de Londres, dès sa fondation.

« Nicolas Le Fèvre, dit M. Dumas, peut servir de type pour les chimistes de son époque et avec d'autant plus de raison qu'il lui a été donné de fonder l'enseignement de la Chimie dans les deux royaumes les plus importants de l'Europe civilisée. »

Le Fèvre a pris pour guides Glauber et Van Helmont, qu'il regardait « comme les deux phares qu'il faut suivre dans l'étude de la Chimie. »

Il a signalé le premier la loi des dissolutions saturées, étudié les propriétés d'un grand nombre de médicaments et découvert l'acétate de mercure.

Son principal ouvrage est la *Chimie théorique et pratique*, imprimée à Paris en 1660.



GASCOYGNE (GUILLAUME).

(Né vers 1620, tué le 2 juillet 1644 à la bataille de Marstonmoor.)

Il a laissé une série d'observations astronomiques, commencées en 1638 et continuées jusqu'en 1643, qui parurent en 1725 dans l'*Histoire céleste* de Flamsteed.

Il se servait, pour ses observations, d'une lunette de quatre pieds, munie d'un micromètre de son invention et le premier qui ait été imaginé, car celui de Huyghens ne fut mis en usage, pour la première fois, qu'en 1658, pour la détermination du diamètre de Vénus.

Le micromètre de Gascoygne était composé de deux fils parallèles dont la distance pouvait être augmentée ou diminuée à volonté par un mouvement de vis. Le rapport de la demi-distance des deux fils à la longueur focale de l'objectif donnait la tangente du demi-diamètre apparent observé.

Gascoygne trouva, à l'aide de cet instrument, pour les valeurs maximum et minimum du demi-diamètre apparent du Soleil, les nombres 16′27″,5 et 15′52″,5, qui sont très approchés.

Auzout et Picart, en France, n'ont conçu que plus tard la même idée; mais comme l'invention de Gascoygne n'a été publiée que postérieurement aux communications qu'ils firent de la leur, ils doivent partager avec lui l'honneur d'une découverte très simple assurément, mais qui devait avoir la plus grande influence sur les progrès de l'Astronomie.

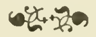
Hooke se chargea de revendiquer, devant la Société royale de Londres, les droits de l'Angleterre à l'invention contestée; on répondit avec raison que les droits, en pareille matière, s'acquièrent par la publication.

BOREL (PIERRE).

(Né à Castres vers 1628, mort en 1689.)

Médecin, chimiste et antiquaire. Il vint à Paris en 1653, fut nommé médecin ordinaire du Roi et entra à l'Académie des Sciences en 1674.

Il a publié de nombreux ouvrages, parmi lesquels nous citerons : *Antiquités de Castres* (1649); une *Vie de Descartes* (1653); *Bibliotheca chimica seu catalogus librorum hermeticorum* (1654); *De vero telescopii inventore* (1654); *Discours prouvant la pluralité des mondes* (1657).



PECQUET.

(Né à Dieppe en 1620, mort dans la même ville en 1674.)

On croyait avant lui que les vaisseaux lactés ou chylifères, qui recueillent le chyle dans l'intestin et le conduisent dans le sang à travers le mésentère, se rendaient au foie : Pecquet démontra qu'ils se rendent dans le canal thoracique et que le chyle provenant de l'intestin est versé intégralement dans le sang.

Pecquet fut le médecin de Fouquet.



VIVIANI (VINCENT).

(Né à Florence en 1622, mort dans la même ville en 1703.)

Disciple de Galilée, il s'attacha particulièrement à Torricelli, après la mort de leur maître commun. Son premier ouvrage : *De maximis et minimis geometrica divinatio in quintum coni-*

corum Apollonii Pergæi nunc desideratum (Florence, 1659) répandit bientôt sa réputation dans toute l'Europe. Les Médicis le comblèrent aussitôt de leurs bienfaits; Colbert l'inscrivit sur la liste des savants étrangers auxquels le roi faisait des pensions; le grand-duc Ferdinand le nomma son géomètre et son premier ingénieur; il fut membre des Académies del Cimento et des Arcadiens, associé étranger de la Société royale de Londres et de l'Académie des Sciences de Paris. Il refusa, pour ne pas quitter sa patrie, la place de premier astronome que lui offrait Louis XIV et les offres de Casimir, roi de Pologne.

Le plus important de ses ouvrages est intitulé : *De locis solidis secunda divinatio geometrica in quinque libros, injuria temporum amissos, Aristæi senioris geometræ;* il ne parut qu'en 1701. Viviani y avait travaillé près de quarante ans.

Il proposa en 1692 aux amateurs de la nouvelle analyse un problème célèbre dont voici l'énoncé : *Il y a parmi les antiques monuments de la Grèce un temple consacré à la Géométrie, dont le plan est circulaire, et qui est couronné d'un dôme hémisphérique; ce dôme est percé de quatre fenêtres égales, avec un tel art que le restant de la surface est absolument quarrable. On demande de quelle manière on s'y était pris.*

Les solutions arrivèrent de toutes parts : Leibniz et Jacques Bernouilli, le marquis de l'Hôpital, Wallis et David Gregory en donnèrent chacun une, mais celle de Viviani était la plus simple. Il l'a développée dans son *Exercitatio mathematica de formatione et mensura fornicum,* qui contient en outre les solutions d'un grand nombre d'autres problèmes. Les démonstrations de ces problèmes ont été données par le Père Guido Grandi sous le titre *Vivianeorum problematum demonstratio.*

SLUSE (RENÉ, FRANÇOIS, WALTER DE).

(Né en 1622, mort en 1685.)

Il était chanoine de la cathédrale de Liège. Il a développé après Descartes la méthode de construction des racines des équations déterminées par l'intersection de deux courbes, en introduisant une inconnue auxiliaire dont l'élimination reproduirait l'équation primitive.

Il a exposé cette méthode dans un ouvrage intitulé : *Mesolabum, seu duæ mediæ proportionales per circulum et ellipsim, vel hyperbolam, infinitis modis exhibitæ* (1659) ; il a réédité cet ouvrage en 1668, *cum parte altera de analysi et miscellaneis*. Ces *Miscellanea* traitent des spirales, des quadratures de la cycloïde et d'autres courbes, de la recherche des points d'inflexion, etc.

De Sluse est le premier géomètre qui ait employé la forme simple

$$-\frac{f'_x}{f'_y}$$

pour le coefficient angulaire de la tangente en un point (x, y) d'une courbe représentée par une équation entière

$$f(x,y) = 0.$$

Hudde était arrivé à quelque chose d'analogue, mais Huyghens avait trouvé, par la méthode de Fermat, l'équation

$$f'_x(x,y) = 0,$$

qui détermine les points maximum et minimum.

Bien entendu les notations f'_x et f'_y n'étaient pas encore usitées,

non plus que la dénomination de polynômes dérivés. La règle donnée par de Sluse était de multiplier chaque terme de l'équation proposée par l'exposant de x ou de y dans ce terme, de diminuer cet exposant d'une unité, et de prendre le quotient des deux résultats obtenus, changé de signe.



ROOKE (LAURENT).

(Né à Deptfort en 1623, mort en 1662.)

D'abord professeur adjoint d'Astronomie au collège Wadham, à l'Université d'Oxford, puis professeur titulaire au collège Gresham, il fut chargé de la chaire de Géométrie en 1657. Ce fut lui qui, avec quelques amis, forma en 1660 le premier noyau de la Société royale de Londres. Cependant cette Société ne fut constituée officiellement qu'après sa mort.



PASCAL (BLAISE).

(Né à Clermont (Puy-de-Dôme) en 1623, mort en 1662.)

Son père, Étienne Pascal, était président à la Cour des aides de Clermont-Ferrand. C'était un homme distingué à tous égards; il perdit sa femme en 1626, vendit sa charge et vint s'établir à Paris. Il avait beaucoup cultivé les Sciences et ne tarda pas à se lier avec Mersenne, le Pailleur, Roberval, Mydorge, Carcavi, etc.

Blaise Pascal avait montré tout jeune des dispositions étonnantes pour les Mathématiques, mais son père ne voulait pas

qu'il s'y adonnât encore et lui refusait les moyens de s'y instruire. L'enfant chercha en cachette à faire une petite Géométrie et, découvert, obtint un Euclide qu'il dévora bientôt.

Il composa à seize ans un *Traité des sections coniques* dont un extrait en sept pages fut communiqué à Descartes, qui n'en pouvait revenir. Cet extrait fut publié en 1640. Quant au Traité lui-même, il est aujourd'hui perdu. On sait seulement que Leibniz en a eu deux copies entre les mains, vers 1676, et qu'il en retourna une à M. Périer, en lui conseillant de la faire imprimer, ce qui ne fut pas fait.

Ce Traité contenait le théorème relatif à l'hexagone inscrit, dont Pascal voulait faire la base de toute la théorie des sections coniques, et il paraît qu'il en avait déduit toutes les propriétés de ces courbes.

Il inventa vers l'âge de 22 ans sa machine à calculer, et le triangle arithmétique qui sert à former rapidement les coefficients des puissances successives d'un binôme. Viète avait montré la loi de formation de ces coefficients; Newton en a plus tard donné la formule, qui permet d'en calculer un quelconque sans passer par tous les autres.

Les premiers travaux de Pascal sur la cycloïde datent de 1658. Roberval avait trouvé l'aire de la courbe entière et le volume qu'elle engendre en tournant autour de son axe ou autour de sa base; Pascal détermina le segment de l'aire, détaché par une parallèle quelconque à la base, les volumes qu'il engendre en tournant soit autour de sa base, soit autour de l'axe, ainsi que les centres de gravité de ces volumes; enfin les centres de gravité des moitiés de ces solides, coupés par des plans de symétrie; et, sous le nom de Dettonville, il envoya à tous les géomètres une lettre circulaire

les invitant à concourir pour la solution des problèmes qu'il venait de traiter; il s'engageait à donner 40 pistoles au premier qui les résoudrait et 20 au second.

Wallis envoya d'Oxford les solutions de toutes les questions proposées, mais avec des erreurs de calcul et dans des conditions de délai qui empêchèrent la commission de lui adjuger le prix. Quant au P. Lalouère, il prétendit avoir trouvé toutes les solutions demandées, mais refusa de les communiquer, une exceptée, la seule, probablement, qu'il eût trouvée.

Aucun des concurrents n'ayant répondu aux questions proposées, dans les délais fixés, Pascal prolongea de trois mois la durée du concours, en y ajoutant les problèmes de la longueur d'un arc quelconque de la cycloïde, commençant au sommet; du centre de gravité de cet arc; de l'aire engendrée par cet arc en tournant autour de l'axe ou autour de la base de la cycloïde; enfin des centres de gravité de ces aires, de leurs moitiés ou de leurs quarts.

Cette prolongation n'ayant produit aucun résultat, Pascal publia au commencement de 1659 ses propres solutions, qui produisirent dans le monde savant une sensation immense.

On sait l'embarras où s'était trouvé jeté Galilée par cette observation des fontainiers de Florence, que l'eau, dans une pompe aspirante, cesse de s'élever lorsqu'elle a atteint une hauteur de 32 pieds. Torricelli trouva dans la pesanteur de l'air la solution qui avait échappé au maître; Descartes indiqua la hauteur qu'atteindrait le mercure dans un tube vide, si on le substituait à l'eau.

Pascal résolut de vérifier le fait, et eut l'idée de montrer que l'ascension des liquides dans le vide n'étant due qu'à la pression

atmosphérique, la hauteur à laquelle s'arrêteraient les liquides diminuerait, si l'on s'élevait à une grande hauteur.

Des expériences exécutées dans le Puy-de-Dôme par Périer, beau-frère de Pascal, et sur les indications de celui-ci, réussirent pleinement (1648). Déjà, l'année précédente, Pascal avait publié ses *Expériences sur le vide*. De nouveaux essais faits à Paris, sur la tour de Saint-Jacques-la-Boucherie, confirmèrent les résultats obtenus par Périer.

D'un même coup, Pascal avait créé le baromètre et indiqué la plus intéressante de ses applications, la mesure des hauteurs.

On l'a accusé, de son vivant même, de s'être approprié les expériences de Torricelli; le fait est manifestement faux, car il avait lui-même signalé ces expériences dans l'opuscule que nous avons cité, sans en connaître l'auteur.

Il fit paraître ensuite son *Traité de la pesanteur de la masse de l'air*, où il explique tous les phénomènes atmosphériques par la pression de l'air. Ses recherches dans cette direction le conduisirent à l'examen des fondements de l'Hydrostatique (*Traité de l'équilibre des liqueurs*). Ce traité, comme le précédent, fut écrit en 1653.

Voici la liste des ouvrages de Pascal : *Traité des coniques* (1640), dont il ne reste qu'un fragment; une série d'opuscules : *De numericarum potestatum ambitibus*, *Traité sur les nombres multiples*, *De numeris magico-magicis*, *Promotus Apollonius Gallus*, *Tactiones sphericæ*, *Tactiones etiam conicæ*, *Loci solidi*, *Loci plani*, *Perspectivæ methodus*, *Aleæ geometria*, dont on n'a que les titres; *Avis nécessaire à tous ceux qui auront la curiosité de voir la machine arithmétique et de s'en servir* (1645), avec dédicace au chancelier Séguier, et, en 1650,

une lettre à Christine de Suède en lui envoyant la machine arithmétique; *Traité du triangle arithmétique*, avec ses usages *pour les combinaisons, pour les partis de jeu, pour trouver les puissances des binômes et apotômes; Traité des ordres numériques*, ou *De numericis ordinibus tractatus* (ces traités ont paru réunis en 1665, 1 vol. in-4°); *De numericorum ordinum compositione; De numericorum ordinum resolutione; De numericorum ordinum summa; De numerorum continuorum productis; Producta continuorum resolvere; Numericarum potestatum generalis resolutio; Combinationes; Potestatum numericarum summa; de numeris multiplicibus; Deux lettres à Fermat* (1654) sur les jeux de hasard; *Problemata de cycloide proposita mense junii* (1658); *Réflexions sur la condition des prix attachés à la solution des problèmes de la cycloïde*, bientôt suivies de : *Annotata in quasdam solutiones problematum de cycloide; Histoire de la roulette appelée autrement trochoïde ou cycloïde*, suivie de *Suite de la roulette; Lettre de M. Dettonville à M. de Carcavi, ci-devant conseiller du roi en son grand conseil*, suivie de *Cinq traités des sommes simples, triangulaires et pyramidales; des trilignes rectangles et de leurs onglets; des sinus du quart de cercle; des arcs de cercles et des solides circulaires; Traité général de la roulette* ou *Problèmes proposés publiquement et résolus par A. Dettonville; Dimensions des lignes courbes de toutes les roulettes; De l'escalier circulaire, des triangles cylindriques et de la spirale autour du cône; Propriétés du cercle, de la spirale et de la parabole; Nouvelles expériences touchant le vuide* (1647); *Réponse de Pascal au Père Noël, jésuite* (1647), suivie de : *Lettre de Pascal à M. Le Pailleur au sujet du Père Noël, Lettre de Pascal à M. de Ribeyre, premier prési-*

dent à la cour des aides de Clermont et *Réplique de Pascal à M. de Ribeyre ; Traité de l'équilibre des liqueurs* et *Traité de la pesanteur de la masse de l'air; Récit de la grande expérience de l'équilibre des liqueurs, projetée par le sieur B. Pascal* (1648), précédé de deux fragments dans l'édition de 1663 et suivi de *Nouvelles expériences faites en Angleterre, expliquées par les principes établis dans les deux traités de l'équilibre des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l'air; Lettres de MM. Pascal et Roberval à M. Fermat sur un principe de Géostatique mis en avant par ce dernier; Lettres de Louis de Montalte à un provincial de ses amis et aux révérends Pères jésuites sur la morale et la politique de ces pères* (1656, in-4°); *Pensées de Pascal* (1669, in-12); *Lettres touchant la possibilité d'accomplir les commandements de Dieu et dissertation sur le véritable sens des paroles du concile de Trente, que les commandements ne sont pas impossibles aux justes; Discours sur la possibilité et le pouvoir; Comparaison des anciens chrétiens avec ceux d'aujourd'hui; Questions sur les miracles; Sur la signature du formulaire; Sur la conversion du pécheur.* Outre plusieurs opuscules qu'on attribue à Pascal, à tort ou à raison, il a eu part à quelques-uns, comme *Réponses de divers curés à l'apologie pour les casuistes et réponse à un écrit sur les miracles qu'il a plu à Dieu de faire à Port-Royal.*

Les œuvres complètes de Pascal ont été publiées en 1858 par Lahure.

Nous passons à l'analyse de ses œuvres mathématiques.

On connaît assez le triangle arithmétique et ses usages pour que nous puissions nous dispenser d'en parler.

Le petit traité *De numeris multiplicibus* a pour objet la solution générale de cette question : un nombre quelconque étant donné, reconnaître s'il est multiple d'un autre nombre donné, et, dans le cas contraire, trouver le reste qu'il donne. La méthode bien connue par laquelle on traite la question par des considérations analogues à celles qu'on appliquait depuis longtemps aux diviseurs 9 et 11, est de Pascal.

Le traité intitulé *Potestatum numericarum summa* a plus d'importance, parce qu'il contient la solution générale et complète de la question si capitale, dans la méthode des indivisibles, d'exprimer la somme des puissances semblables et entières d'une suite de nombres en progression arithmétique. Le procédé de Pascal n'est, du reste, pas inférieur à celui que nous employons aujourd'hui. Toutefois Pascal laisse aux coefficients leur forme numérique.

Il fait remarquer qu'on avait trouvé avant lui la somme des quarrés et la somme des cubes des nombres entiers consécutifs 1, 2, 3, ..., mais que les méthodes par lesquelles on y était arrivé n'avaient pas pu être étendues aux autres puissances, parce qu'elles étaient propres seulement aux degrés qu'on avait considérés. Il insiste aussi sur ce que sa méthode ne suppose ni que la raison de la progression soit 1, ni que les nombres qui y entrent soient entiers, ni que le premier terme soit la raison, ou un multiple de la raison ; le progrès était donc considérable.

La formule parlée à laquelle Pascal arrive conduit immédiatement, pour le cas de la progression des nombres naturels, indéfiniment prolongée, à cette conséquence si péniblement entrevue par Cavalieri :

« *Summa omnium in quolibet gradu est ad maximam in*

proximè superiori gradu ut unitas ad exponentem superioris gradus, » c'est-à-dire : la somme des puissances, d'un degré quelconque, de tous les nombres entiers est à la puissance immédiatement supérieure du dernier de ces nombres comme l'unité est à l'exposant de cette puissance supérieure.

Nous passons à la lettre adressée à M. de Carcavi et aux traités qui l'accompagnaient.

Lettre à M. de Carcavi.

Pascal commence par exposer sa méthode pour la recherche des centres de gravité. La figure proposée est divisée en un nombre infini de parties par des plans parallèles équidistants, et il s'agit de préparer l'emploi de la méthode des indivisibles.

Le théorème des moments, en ce qui concerne les forces parallèles, était connu depuis longtemps, mais Pascal remarque que, si une figure est divisée en un nombre infini de parties par des plans parallèles équidistants, l'équation fournie par ce théorème, en supposant les moments pris par rapport au plan qui passe par le centre de gravité, se simplifie immédiatement parce que les distances à ce plan des centres de gravité des parties comprises d'un côté sont comme les nombres entiers consécutifs, de sorte que si A_1, A_2, A_3, ... sont les poids des parties situées d'un côté du centre de gravité et B_1, B_2, B_3, ... ceux des parties situées de l'autre côté, l'équation est

$$A_1 + 2A_2 + 3A_3 + \ldots = B_1 + 2B_2 + 3B_3 + \ldots ;$$

le premier membre est la *somme triangulaire* des poids A, prise à partir du premier A_1 et il en est de même du second membre, par rapport aux poids B.

« Pour que les poids d'un bras soient en équilibre avec ceux de l'autre, il faut donc que la somme triangulaire des uns soit égale à la somme triangulaire des autres, à commencer toujours du centre de gravité. »

La somme triangulaire de quantités $A_1, A_2, A_3, \ldots$, à commencer de A_1, est, comme on voit, la somme des quantités contenues dans la figure

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & \ldots \\ & A_2 & A_3 & A_4 & \ldots \\ & & A_3 & A_4 & \ldots \\ & & & A_4 & \ldots \end{array}$$

Pascal transforme ensuite l'équation fondamentale dans la suivante :

Les sommes triangulaires de tous les poids A et B, comptés successivement des deux extrémités du corps, sont entre elles dans le rapport des distances du plan passant par le centre de gravité aux plans passant par les extrémités, dans l'ordre où l'on a pris ces extrémités.

C'est-à-dire, en supposant qu'il y ait n poids A et p poids B,

$$\frac{\text{somme triangulaire } A_n, A_{n-1}, \ldots, A_1, B_1, B_2, \ldots, B_p}{\text{somme triangulaire } B_p, B_{p-1}, \ldots, B_1, A_1, A_2, \ldots, A_n} = \frac{n}{p} = \frac{a}{b},$$

a et b désignant les distances du centre de gravité aux deux plans qui comprennent le corps, distances le long desquelles sont répartis les poids A et les poids B, ou, comme dit Pascal, les *deux bras de la balance.*

Les démonstrations sont présentées en forme de vérifications, mais la généralisation en est facile.

On voit que la détermination du centre de gravité d'une figure est ainsi ramenée à la recherche des sommes triangulaires des poids des parties de cette figure, comptés successivement de chacune des extrémités, puisque la somme $a+b$ est donnée d'avance.

On verra bientôt comment peuvent s'obtenir ces sommes triangulaires.

Mais Pascal remarque qu'il suffirait que l'on connût la distance des plans extrêmes, ou la balance, la somme triangulaire des poids pris à partir de l'une des extrémités et la somme de tous ces poids pour pouvoir déterminer les distances des deux plans extrêmes au plan qui leur serait mené parallèlement, par le centre de gravité, ou les deux bras de la balance. En effet, les deux bras étant désignés par a et b, on a déjà

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{somme triangulaire } A_n, A_{n-1}, \ldots, A_1, B_1, B_2, \ldots, B_p}{\text{somme triangulaire } B_p, B_{p-1}, \ldots, B_1, A_1, A_2, \ldots, A_n}$$
$$= \frac{1A_n + 2A_{n-1} + \ldots + nA_1 + (n+1)B_1 + \ldots + (n+p)B_p}{1B_p + 2B_{p-1} + \ldots + pB_1 + (p+1)A_1 + \ldots + (p+n)A_n},$$

et il en résulte, par exemple,

$$\frac{a}{a+b}$$
$$= \frac{1A_n + 2A_{n-1} + \ldots + nA_1 + (n+1)B_1 + \ldots + (n+p)B_p}{(n+p+1)(A_n + A_{n-1} + \ldots + A_1 + B_1 + \ldots + B_p)}.$$

Il est vrai que l'on ne pourrait rien tirer directement de cette formule où la somme $(A_n + A_{n-1} + \ldots + A_1 + B_1 + \ldots + B_p)$ est finie, mais où la fraction

$$\frac{1A_n + 2A_{n-1} + \ldots + (n+p)B_p}{n+p+1}$$

est le rapport de deux infinis. Quand Pascal s'en servira, il multipliera les deux termes du second membre par l'une des divisions de la balance, division qui tend vers zéro, de sorte que, s'il pouvait énoncer son théorème, il dirait : l'un des bras est le quotient de la somme des moments de tous les poids par rapport à l'extrémité du bras cherché, divisée par la somme de tous les poids, ce qui est la formule dont nous nous servons.

Pascal définit ensuite la *somme pyramidale* de quantités rangées dans un ordre déterminé.

Soient A_1, A_2, A_3, ... les grandeurs considérées : leur somme pyramidale est la somme des sommes triangulaires qu'elles fournissent, la première à compter de A_1, la seconde à compter de A_2, ..., c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}&\text{Somme pyramidale } (A_1, A_2, \ldots)\\ &\quad = \text{somme triangulaire } (A_1, A_2, \ldots)\\ &\quad + \text{somme triangulaire } (A_2, A_3, \ldots)\\ &\quad + \text{somme triangulaire } (A_3, A_4, \ldots) + \ldots.\end{aligned}$$

On voit que A_1 n'entre qu'une fois dans la somme pyramidale, A_2 y a pour coefficient 3, A_3 y est répété 6 fois, etc., « selon l'ordre des nombres triangulaires. »

Cela posé, si du double de la somme pyramidale on retranche la première somme triangulaire, le reste

$$\begin{aligned}&\text{Somme triangulaire } (A_1, A_2, \ldots)\\ &\quad + 2 \text{ sommes triangulaires } (A_2, A_3, \ldots)\\ &\quad + 2 \text{ sommes triangulaires } (A_3, A_4, \ldots) + \ldots\end{aligned}$$

contiendra une fois A_1, 4 fois A_2, 9 fois A_3, etc., c'est-à-dire que les coefficients de A_1, A_2, A_3. ... seront les quarrés des nombres entiers consécutifs.

Pascal dit : « Cela est aisé par Maurolic; » c'est même aisé sans Maurolic; seulement l'emploi de formules algébriques le rendra plus clair.

La somme pyramidale contient A_n un nombre de fois égal à

$$1 + 2 + \ldots + n$$

ou

$$\frac{n(n+1)}{2};$$

le double de cette somme le contient donc

$$n(n+1) \text{ fois}$$

et, si de ce double on retranche la première somme triangulaire, qui le contient n fois, il ne restera que

$$[n(n+1) - n] \text{ fois } A_n \quad \text{ou} \quad n^2 A_n.$$

« Mais, dit Pascal, la somme triangulaire (à retrancher du double de la somme pyramidale) n'est qu'un indivisible à l'égard de la somme pyramidale, puisqu'il y a une dimension de moins, et que c'est la même chose qu'un point à l'égard d'une ligne, ou qu'une ligne à l'égard d'un plan, ou qu'un plan à l'égard d'un solide, ou enfin qu'un fini à l'égard de l'infini, ce qui ne change pas l'égalité. »

On peut donc regarder le double de la somme pyramidale de grandeurs

$$A_1, A_2, A_3, \ldots$$

en nombre infini, comme égale à

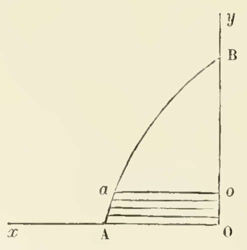
$$1^2 A_1 + 2^2 A_2 + 3^2 A_3 + \ldots.$$

Voici à quoi tendent ces considérations : soit AB (*fig.* 8) une

courbe quelconque rapportée aux deux axes rectangulaires Ox, Oy : la figure OAB forme ce que Pascal appelle un *triligne rectangle*.

Supposons OB divisé en une infinité de parties égales, dont nous appellerons l'une h, menons les abscisses de la courbe, par les points de division, appelons ces abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_1$ désignant la première à partir de OA; l'aire du triligne sera représentée par

Fig. 8.



$$S_1 = h(x_1 + x_2 + \ldots);$$

cette aire diminuée de l'espace compris entre OA et la première abscisse x_1 sera

$$S_2 = h(x_2 + x_3 + \ldots);$$

la même aire diminuée de l'espace compris entre OA et l'abscisse x_2 sera

$$S_3 = h(x_3 + x_4 + \ldots);$$

etc.

Si l'on empile toutes ces aires en mettant entre leurs plans consécutifs la même distance h et plaçant chacune d'elles en retrait à partir de OA, de façon qu'elle se projette sur le plan du triligne, suivant son égale, elles formeront les sections détermi-

nées par des plans parallèles à celui du triligne, menés aux hauteurs h, $2h$, $3h$, ..., dans le tronc de cylindre droit élevé sur le triligne, que formerait le plan mené par OA sous l'angle de 45° avec celui du triligne.

$S_1 h, S_2 h, S_3 h$, ... seront donc les volumes des segments interceptés dans cet *onglet* entre les plans consécutifs considérés. Le volume de cet onglet sera donc

$$h(S_1 + S_2 + S_3 + \ldots)$$

ou, si l'on remet à la place de S_1, S_2, S_3 leurs valeurs,

$$h^2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots),$$

c'est-à-dire le produit de la somme triangulaire des abscisses par le quarré de l'intervalle laissé entre elles.

Si l'on voulait représenter la somme

$$h^2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots)$$

au moyen des notations modernes, on l'écrirait d'abord sous la forme

$$h(hx_1 + 2hx_2 + 3hx_3 + \ldots)$$

et remarquant que h, $2h$, $3h$, ... sont précisément les ordonnées qui correspondent aux abscisses x_1, x_2, ..., on la changerait en

$$h(y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 + \ldots),$$

puis en

$$h \Sigma yx;$$

enfin, en remplaçant h par dy, on obtiendrait

$$\int xy\, dy$$

qui représente bien en effet le volume de l'onglet en question,

considéré comme décomposé en segments par des plans parallèles à celui qui serait mené par OA perpendiculairement au plan du triligne.

On peut encore noter cette intégrale autrement : l'une des sommes S est une intégrale de la forme

$$\int x\,dy,$$

dans laquelle la limite supérieure est fixe, Y, par exemple, et la limite inférieure variable, y, si l'on veut. C'est donc une fonction de y, puisque Y est une constante. Supposons que cette fonction ait été obtenue et représentons-la par $f(y)$, de sorte que l'on ait trouvé

$$S = f(y):$$

la somme

$$h(S_1 + S_2 + S_3 + \ldots)$$

pourra alors être écrite sous la forme

$$\int f(y)\,dy,$$

et elle devra être prise entre les limites y_0 et Y, si y_0 désigne l'y à partir duquel doit être prise la somme triangulaire.

Quant à la somme pyramidale, qui est la somme des sommes triangulaires, elle n'est autre chose, pourvu qu'on n'omette pas le facteur h^2, que la somme des volumes placés dans le même tronc de cylindre au-dessus des plans menés aux distances h, $2h$, $3h$, ... du plan du triligne. C'est une somme d'onglets. Si on la double et qu'on la multiplie encore par h, on aura l'expression

$$h^3(1^2x_1 + 2^2x_2 + 3^2x_3 + \ldots),$$

qui, dit Pascal, représente un *plan-plan*.

Si l'on veut noter cette somme sous forme d'intégrale, il n'y a

qu'à faire passer h^2 dans la parenthèse, ce qui donne

$$h[(1h)^2 x_1 + (2h)^2 x_2 + (3h)^2 x_3 + \ldots]$$

ou

$$h(y_1^2 x_1 + y_2^2 x_2 + y_3^2 x_3 + \ldots)$$

ou encore

$$h \Sigma y^2 x$$

ou enfin

$$\int x y^2 \, dy.$$

Cette intégrale représentera le double de la somme pyramidale.

On peut aussi noter cette somme autrement : si l'on suppose qu'on ait obtenu l'intégrale

$$\int_{y_0}^{Y} f(y) \, dy,$$

dont il vient d'être parlé, et qui représente la somme triangulaire à partir de laquelle se forme la somme pyramidale, et, si l'on a trouvé

$$\int_{y_0}^{Y} f(y) \, dy = F(y_0),$$

$F(y)$ désignera une quelconque des sommes triangulaires qui entrent dans la somme pyramidale ; cette somme pyramidale sera donc représentée par

$$\int_{y_0}^{Y} F(y) \, dy.$$

Il est important d'observer que Pascal n'introduit jamais la division h, qui doit finalement disparaître dans les rapports. C'est pourquoi il dit :

« La somme simple des abscisses fait un plan, leur somme triangulaire forme un solide qui est composé d'autant de plans

qu'il y a de divisions dans l'axe (OB) et leur somme pyramidale fait un plan-plan composé d'autant de solides qu'il y a de portions dans l'axe ; et ainsi autant qu'il y aura de divisions, il y aura aussi de solides, lesquels étant multipliés chacun par une des petites divisions de l'axe, formeront autant de petits plans-plans de même hauteur, qui tous ensemble font le plan-plan dont il s'agit et l'on ne doit pas être blessé de cette quatrième dimension, puisque, comme je l'ai dit ailleurs, en prenant des plans au lieu des solides, ou même de simples droites, qui soient entre elles comme les sommes triangulaires partielles, qui font toutes ensemble la somme pyramidale, la somme de ces droites fera un plan qui tiendra lieu de ce plan-plan. »

Nous ne sommes plus habitués à entendre des choses aussi compliquées. C'est pourquoi je pourrais dire à peu près comme Képler : « Prenez donc pitié de moi qui les ai toutes lues dans l'espoir de vous les rendre intelligibles. »

La lettre à M. de Carcavi continue par la définition des *onglets* et *doubles onglets*, dont nous venons de donner, par anticipation, un avant-goût. L'onglet simple est le tronc de cylindre que nous avons défini.

« Soit un triligne rectangle AOB (*fig.* 8) dont celle qu'on voudra de OA ou OB, OB par exemple, sera l'axe et l'autre la base. Soient divisées en un nombre indéfini de parties égales OA, OB et AB et que les parties de OA soient égales à celles de OB et aussi à celles de AB, car il ne faut pas craindre l'incommensurabilité, puisqu'en ôtant d'une de deux grandeurs incommensurables une quantité moindre qu'aucune donnée, on les rend commensurables; soient maintenant menées, des points de division

de l'axe et de la base, des perpendiculaires qui prendront les noms d'*ordonnées à l'axe* et d'*ordonnées à la base*, puis semblablement, des points de division de la courbe, des perpendiculaires à l'axe et à la base, qui s'appelleront les *sinus de la courbe* à l'axe, et à la base ».

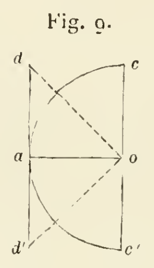
« Que l'on conçoive, comme précédemment, le cylindre droit ayant le triligne pour base et qu'on le coupe par des plans menés par OA et OB et inclinés de 45° sur le plan du triligne, les troncs du cylindre, séparés par ces plans, seront l'onglet de la base et l'onglet de l'axe; et si l'on mène par les mêmes droites des plans inclinés aussi de 45°, au-dessous du plan du triligne, ils comprendront, avec leurs symétriques, les doubles onglets de la base et de l'axe. »

Cela posé, considérons par exemple le double onglet de l'axe OB, lequel est compris entre la surface cylindrique qui a pour directrice AB, le plan mené par OA perpendiculairement au plan du triligne et les deux plans menés par OB à 45° de distance angulaire du plan de ce triligne : ce double onglet aura un grand nombre de rapports remarquables avec le demi-solide qu'engendrerait le triligne en tournant autour du même axe OB. En effet, pour rendre l'explication plus claire, supposons que le demi-solide en question soit déterminé, dans le solide entier, par le plan mené par OB perpendiculairement au plan du triligne et qu'il soit à la gauche de ce plan mené par OB, de façon qu'il se projette sur le plan du triligne suivant ce triligne lui-même.

Coupons l'onglet et le demi-solide par une infinité de plans perpendiculaires à OB et équidistants entre eux : la section faite par un de ces plans parallèles dans le demi-solide sera un demi-cercle tel que *ocac'* (*fig.* 9) ayant pour rayon une des abscisses

de la courbe du triligne, et le même plan coupera le double onglet suivant le triangle isoscèle *dod'*, où la base sera double de la hauteur.

Fig. 9.



L'aire du demi-cercle sera

$$\frac{1}{2}\pi\overline{oa}^2,$$

et celle du triangle,

$$a^2.$$

Le rapport des deux sections sera donc constant et égal à

$$\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi :

1° Les volumes des deux corps seront dans le rapport

$$\frac{\pi}{2}.$$

2° Les centres de gravité du double onglet et du demi-solide seront sur le plan du triligne. C'est évident.

3° Ces centres de gravité seront également distants du plan élevé en O perpendiculairement à OB, puisque les segments

infinitésimaux des deux corps, compris entre des plans parallèles à ce plan de base, resteront toujours dans le même rapport.

4° Les distances des centres de gravité du demi-solide et du double onglet à l'axe OB du triligne seront entre elles dans le rapport

$$\frac{2}{\pi}.$$

En effet, les distances à cet axe OB des centres de gravité du demi-cercle *cac'* et du triangle *dad'* seront respectivement

$$\frac{4}{3\pi} oa \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} oa,$$

dont le rapport est $\frac{2}{\pi}$.

5° Les surfaces courbes du demi-solide et du double onglet seront aussi entre elles dans le rapport

$$\frac{\pi}{2},$$

puisque les sections faites par les mêmes plans parallèles au plan de base, dans les deux surfaces, seront respectivement

$$\pi oa \quad \text{et} \quad 2 oa.$$

6° Les centres de gravité des surfaces courbes du demi-solide et du double onglet seront évidemment tous deux sur le plan du triligne, et également éloignés de la base OA.

7° Les distances de ces centres de gravité à l'axe OB seront entre elles dans le rapport

$$\frac{2}{\pi},$$

puisque les sections faites par les mêmes plans parallèles au plan de base auront leurs centres de gravité à des distances de l'axe OB respectivement égales à

$$\frac{2oa}{\pi} \quad \text{et} \quad oa.$$

Ici finit la lettre à M. de Carcavi. On voit que Pascal va ramener la théorie des figures de révolution engendrées par l'aire d'un triligne ou son contour à la théorie des volumes des doubles onglets ou de leurs surfaces courbes.

Traité des trilignes rectangles et de leurs onglets.

Propriété fondamentale. — Soit toujours (*fig.* 10) OAB un triligne rectangle, dont OB sera l'axe et OA la base; supposons comme précédemment l'axe et la base divisés en parties toutes égales; imaginons les ordonnées à l'axe et à la base menées par les points de division; par les points où les ordonnées à la base coupent la courbe, remenons des perpendiculaires à l'axe, qui s'appelleront les *contre-ordonnées* à l'axe; concevons encore, de l'autre côté du triligne, par rapport à l'axe, une figure quelconque BKO, comprise entre les parallèles AO et BK, figure qui s'appellera l'*adjointe* du triligne; enfin prolongeons jusqu'à la limite courbe de cette figure les ordonnées et les contre-ordonnées à l'axe : « *La somme des rectangles faits de chaque ordonnée à l'axe du triligne et de l'ordonnée de la figure adjointe, située sur la même droite, sera égale à la somme des segments interceptés dans la figure adjointe, depuis chaque contre-ordonnée prolongée, jusqu'à l'extrémité* O *de la figure adjointe.* »

C'est-à-dire, si nous appelons x_p une ordonnée quelconque à l'axe et x_{1p} l'ordonnée à l'axe de la figure adjointe, située sur la même droite ; x'_q une contre-ordonnée du triligne et x'_{1q} la contre-ordonnée de la figure adjointe, située sur la même droite ; enfin h l'une des divisions de l'axe ou de la base, et k_q la distance qui sépare les deux contre-ordonnées x'_q et x'_{q+1} ; on aura,

Fig. 10.



en désignant par n et n' les nombres de divisions de l'axe et de la base :

$$\Sigma_1^n x_p\, x_{1p} = \Sigma_1^{n'} x'_{1q}\, k_q + \Sigma_1^{n'-1} x'_{1q}\, k_q + \ldots + x'_1\, k_1.$$

Pour démontrer cette proposition, Pascal suppose la figure adjointe, KBO, relevée dans le plan mené par OB perpendiculairement au plan du triligne, et il imagine le solide compris entre la face KBO relevée ainsi, le triligne, le cylindre élevé sur l'arc AB, perpendiculairement au plan du triligne, et enfin le cylindre qu'engendrerait la ligne OA en glissant parallèlement à elle-même sur OK relevée.

Pascal dit que ce solide est le produit du triligne par la figure adjointe. C'est une locution vicieuse empruntée à Grégoire de Saint-Vincent; le théorème n'en est pas moins vrai. En effet

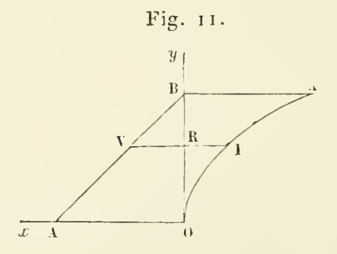
$x_p x_{1p}$ est évidemment l'aire de la section faite dans le solide par le plan perpendiculaire à OB dont le rang est p à partir de O, de sorte que

$$\Sigma_1^n x_p\, x_{1p}\, h$$

est le volume du solide; d'un autre côté, chacune des intégrales contenues dans le second membre de l'équation représente la portion de l'aire de la figure adjointe qui est comprise entre l'extrémité O et une des contre-ordonnées; c'est donc la section du solide par l'un des plans parallèles à celui qui est élevé sur OB, et si on la multiplie par la hauteur h, qui représente aussi une des divisions de OA, on aura le volume d'un des segments du solide, compris entre deux plans perpendiculaires à OA; le produit par h du second membre de l'équation représente donc le volume du solide, comme le premier.

Lemme. — Prenons pour triligne un triangle rectangle isoscèle OAB, et pour figure adjointe la figure enfermée entre OB, BK égal à OB et la parabole du second degré, OK, dont le sommet soit en O. L'aire ORI, qui entre dans le second membre de l'équation fondamentale, sera le quotient de $\frac{1}{3}\overline{OR}^3$ par OB.

Fig. 11.



Si la parabole OK était de degré m, on aurait de même

$$\text{ORI} = \frac{1}{m+1} \frac{\overline{\text{OR}}^{m+1}}{\overline{\text{OB}}^{m-1}}.$$

C'est la formule de quadrature des paraboles de tous les degrés entiers.

Proposition I.

« La somme des ordonnées à la base est égale à la somme des ordonnées à l'axe. »

C'est l'équivalent de notre formule

$$\int y\, dx = \int x\, dy,$$

puisque Pascal suppose $dx = dy$.

Proposition II.

« La somme des quarrés des ordonnées à la base est double de la somme des rectangles faits de chaque ordonnée à l'axe et de sa distance à la base. »

C'est-à-dire, en désignant par y une des ordonnées à la base, lesquelles sont en nombre n', et par x une des n ordonnées à l'axe,

$$\Sigma_1^{n'} y_p^2 = 2\, \Sigma_1^n (ph)\, x_p.$$

Car si, au lieu d'une figure quelconque, on prend pour figure adjointe du triligne un triangle rectangle isoscèle BKO, le premier membre de l'équation fondamentale se réduira à

$$\Sigma_1^n ph\, x_p,$$

puisque chaque ordonnée de la figure adjointe sera égale à sa

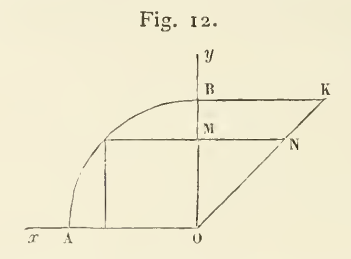
distance à la base, et les termes du second membre, qui seront les aires de triangles tels que OMN, auront respectivement pour valeurs les moitiés des quarrés des ordonnées à la base.

Cette proposition équivaut absolument à celle que traduirait notre formule

$$\int y^2\,dx = xy^2 - 2\int xy\,dy.$$

Car premièrement, dans l'hypothèse où raisonne Pascal, d'un arc terminé aux deux axes, xy^2 est nul à ses deux limites;

Fig. 12.



deuxièmement, Pascal ne donne jamais de signes aux accroissements de x et de y, en passant d'un point à un autre de la courbe. Enfin dx et dy étant supposés égaux, comme nous l'avons dit, Pascal les supprime comme facteur commun.

Corollaire. « Donc la somme des quarrés des ordonnées à la base est double de la somme triangulaire des ordonnées à l'axe, à commencer par la base. »

Proposition III.

« La somme des cubes des ordonnées à la base est triple (de la somme) des solides compris de chaque ordonnée à l'axe et du quarré de sa distance de la base. »

La démonstration est analogue à celle de la proposition II,

mais nous croyons avoir suffisamment indiqué le procédé géométrique que l'auteur emploie partout, et qui reste constamment le même; nous ne pourrions d'ailleurs le suivre de point en point sans tomber dans des longueurs indéfinies. Au reste, Pascal gagnera à être traduit en langage moderne, ses théorèmes en seront plus clairs et ils acquerront une importance qui a sans doute été appréciée des inventeurs du calcul intégral, mais qui, on peut le dire, n'était plus connue depuis longtemps.

La proposition III se traduirait par la formule

$$\int y^3 dx = xy^3 - 3\int xy^2 dy,$$

qui, en tenant compte des observations présentées plus haut, se réduit à

$$\Sigma y^3 = 3\,\Sigma xy^2.$$

Corollaire. « Donc la somme des cubes des ordonnées à la base est égale à six fois la somme pyramidale des ordonnées à l'axe, à commencer par la base. »

Proposition IV.

« On démontrera de même que la somme des quarrés quarrés des ordonnées à la base est quadruple de la somme des ordonnées à l'axe, multipliées chacune par le cube de sa distance de la base ; et ainsi toujours. »

C'est l'équivalent du théorème général

$$\int y^m dx = xy^m - m\int xy^{m-1} dy.$$

Proposition V.

« La somme des solides compris du quarré de chaque ordonnée à la base et de sa distance de l'axe est égale à la somme des solides

compris du quarré de chaque ordonnée à l'axe et de sa distance de la base. »

Théorème que nous traduirions par la formule

$$\int y^2 x\,dx = \frac{1}{2} x^2 y^2 - \int x^2 y\,dy.$$

Pascal donne de son théorème cet autre énoncé : « La somme triangulaire des quarrés des ordonnées à la base est égale à la somme triangulaire des quarrés des ordonnées à l'axe, en commençant toujours du côté du centre du triligne. » C'est évidemment la même chose.

Les propositions suivantes sont comprises sous le titre :

Rapports entre les sinus sur la base d'un triligne quelconque et les portions de sa ligne courbe comprises entre le sommet et les ordonnées à l'axe.

Pascal suppose l'axe du triligne (l'axe et la base ne diffèrent, comme on a vu, que par le nom) et l'arc divisés en parties toutes égales. C'est-à-dire que $dy = ds$. Les sinus se distinguent des ordonnées à l'axe en ce qu'ils tombent des extrémités des divisions égales de l'arc, au lieu d'être élevés des extrémités des divisions égales de l'axe.

Proposition VI.

« La somme des arcs de la courbe compris entre le sommet (c'est le point que nous avons appelé B) et chaque ordonnée à l'axe est égale à la somme des sinus sur la base. »

Nous traduirions ce théorème par la formule

$$\int s\,dy = sy - \int y\,ds,$$

s désignant un arc de la courbe du triligne. sy disparaissant aux deux limites et dy égalant ds, il reste

$$\Sigma s = \Sigma y,$$

si l'on ne tient pas compte des signes.

Pascal démontre son théorème en imaginant un autre triligne, dont la base serait la courbe rectifiée, et dont l'arc passerait par les extrémités des sinus de la figure primitive, rapportés sur la nouvelle base divisée en parties égales à celles du premier arc.

Proposition VII.

« La somme des quarrés de ces mêmes arcs est égale à deux fois la somme triangulaire des mêmes sinus, à commencer par l'axe. »

C'est-à-dire

$$\int s^2\,dy = s^2 y - 2\int sy\,ds.$$

Pascal aurait pu dire aussi bien, comme dans la proposition V, que la somme des quarrés des arcs est égale à deux fois la somme des rectangles formés de chaque sinus et de l'arc correspondant.

Proposition VIII.

« La somme des cubes de ces mêmes arcs est égale à six fois la somme pyramidale des mêmes sinus, à commencer par l'axe. »

C'est-à-dire

$$\int s^3\,dy = s^3 y - 3\int s^2 y\,ds,$$

parce que $\Sigma s^2 y$ fait deux fois la somme pyramidale des y.

Proposition IX.

« La somme triangulaire des mêmes arcs, à commencer de l'axe, est égale à la moitié de la somme des quarrés des mêmes sinus. »

C'est-à-dire

$$\int sy\,dy = \frac{1}{2}sy^2 - \frac{1}{2}\int y^2\,ds.$$

Proposition X.

« La somme pyramidale des mêmes arcs, à commencer par l'axe, est égale à la sixième partie (de la somme) des cubes des mêmes sinus. »

C'est-à-dire

$$\int sy^2\,dy = \frac{1}{3}sy^3 - \frac{1}{2}\int y^3\,ds,$$

parce que Σsy^2 fait deux fois la somme pyramidale des s.

Proposition XI.

« La somme triangulaire des quarrés des mêmes arcs, à commencer de l'axe, est égale à la somme triangulaire des quarrés des mêmes sinus. »

C'est-à-dire

$$\int s^2y\,dy = \frac{1}{2}s^2y^2 - \int y^2s\,ds;$$

c'est un peu monotone, mais il faut aller jusqu'au bout; si ce n'est pour le plaisir du lecteur, ce sera dans l'intérêt de Pascal.

Proposition XII.

« Je dis maintenant qu'en menant les sinus sur l'axe (des points de division de l'arc en parties égales), la somme des rectangles

compris (de chacun) des mêmes arcs et de l'ordonnée qui le termine, est égale à la somme des portions du triligne comprises entre chaque sinus sur l'axe et la base. »

C'est l'équivalent de la formule

$$\int sx\,dy = s\int x\,dy - \int ds \int x\,dy,$$

parce que $s\int x dy$ s'annule aux deux limites du triligne, $\int x dy$ étant nulle à l'une, et s à l'autre.

Proposition XIII.

« La somme des quarrés de chaque arc, multiplié par son ordonnée, est double de la somme triangulaire des mêmes portions du triligne, comprises entre chaque sinus sur l'axe et la base. »

C'est-à-dire]

$$\int s^2 x\,dy = s^2 \int x\,dy - 2\int s\,ds \int x\,dy.$$

Même remarque.

Proposition XIV.

« La somme triangulaire des rectangles de chaque ordonnée avec son arc, à commencer par O, ou, ce qui est la même chose, la somme de tous les solides compris de chaque arc, de son ordonnée et de la distance entre l'ordonnée et la base, est égale à la somme des portions du triligne, multipliée chacune par son bras sur la base, c'est-à-dire par la perpendiculaire abaissée sur la base, du centre de gravité de la portion du triligne. »

C'est-à-dire

$$\int sxy\,dy = s\int xy\,dy - \int ds \frac{\int xy\,dy}{\int x\,dy} \int x\,dy,$$

ou, en simplifiant,

$$\int sxy\,dy = s\int xy\,dy - \int ds \int xy\,dy,$$

mais Pascal ne fait pas la réduction, parce que

$$\frac{\int xy\,dy}{\int x\,dy}$$

a un sens direct.

Proposition XV.

« La somme des arcs multipliés chacun par le quarré de son ordonnée est double de la somme des portions du triligne multipliées chacune par son bras sur l'axe. »

C'est-à-dire

$$\int sx^2\,dy = s\int x^2\,dy - 2\int ds \frac{\int \frac{x^2}{2}\,dy}{\int x\,dy} \int x\,dy.$$

Même remarque; tous ces théorèmes sont étonnamment remarquables.

Les propositions suivantes sont comprises sous le titre : *Méthode générale pour trouver la dimension et les centres de gravité d'un triligne quelconque et de ses doubles onglets, par la seule connaissance des ordonnées à l'axe ou à la base.*

Voici la proposition générale par laquelle commence ce Chapitre et qui est facile à vérifier, les intégrales étant les mêmes de part et d'autre, en vertu des théorèmes précédents :

« Si l'on connaît dans un triligne toutes les choses suivantes :

1° la somme des ordonnées à l'axe,

2° la somme des quarrés de ces ordonnées,

3° la somme des cubes de ces ordonnées,

4° la somme triangulaire de ces ordonnées,

5° la somme triangulaire des quarrés de ces ordonnées,

6° la somme pyramidale de ces ordonnées,

on connaîtra aussi la dimension et les centres de gravité tant du triligne que de ses doubles onglets; c'est-à-dire qu'on connaîtra aussi les choses suivantes :

1° la dimension de l'espace du triligne,

2° le bras du triligne sur l'axe,

3° le bras du triligne sur la base,

4° la dimension du double onglet de la base,

5° le bras de cet onglet sur la base,

6° le bras de cet onglet sur l'axe,

7° la dimension du double onglet de l'axe,

8° le bras de cet onglet sur la base,

9° le bras de cet onglet sur l'axe. »

Cette proposition générale est suivie de corollaires dont voici le principal :

« Si un triligne est tourné premièrement sur la base et ensuite sur l'axe, la distance entre l'axe et le centre de gravité du solide autour de la base est à la distance entre la base et le centre de gravité du solide autour de l'axe comme le bras du triligne sur l'axe est au bras du triligne sur la base. »

C'est-à-dire : si a et b désignent les coordonnées du centre de gravité du triligne, et que a_1 et b_1 désignent l'abscisse et l'ordonnée des centres de gravité des solides engendrés par le triligne dans ses deux révolutions successives autour de la base et autour de l'axe,

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}.$$

En effet, si x et y désignent les coordonnées d'un point quelconque de l'arc du triligne et S la surface de ce triligne,

$$a = \frac{1}{2}\frac{\int x^2 dy}{S} \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{2}\frac{\int y^2 dx}{S};$$

d'un autre côté,

$$a_1 = \frac{\int \pi y^2 x\, dx}{2\pi S b} \quad \text{et} \quad b_1 = \frac{\int \pi x^2 y\, dy}{2\pi S a};$$

par conséquent

$$\frac{a}{b} = \frac{\int x^2 dy}{\int y^2 dx}$$

et

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}\frac{\int y^2 x\, dx}{\int x^2 y\, dy};$$

en sorte que ce qu'il faut démontrer est que

$$\frac{\int y^2 x\, dx}{\int x^2 y\, dy} = 1;$$

or

$$\int y^2 x\, dx = \frac{1}{2}x^2 y^2 - \int x^2 y\, dy;$$

mais $\frac{1}{2}x^2 y^2$ est nul aux deux limites; par conséquent, au signe près,

$$\int y^2 x\, dx = \int x^2 y\, dy.$$

Enfin, il reste une série de propositions placées sous le titre:

Méthode pour trouver la dimension et le centre de gravité de la surface courbe des doubles onglets,
par la seule connaissance des sinus sur l'axe.

Le théorème fondamental consiste en ce que :

« Si on connaît, dans un triligne,

1° la grandeur de sa ligne courbe,

2° la somme des sinus sur l'axe,

3° la somme des quarrés de ces sinus sur l'axe,

4° la somme des rectangles de ces mêmes sinus sur l'axe, multipliés chacun par leur distance de la base :

On connaîtra aussi la dimension de la surface courbe du double onglet de l'axe et le centre de gravité de cette surface courbe, c'est-à-dire le bras de cette surface sur la base et le bras de cette même surface sur l'axe. »

Cette proposition est facile à vérifier : il suffit pour cela de remarquer que les arêtes de la surface cylindrique du double onglet de l'axe ne sont autre chose que les sinus de la courbe sur cet axe.

Propriétés des sommes simples, triangulaires et pyramidales.

Première propriété. — Si l'on connaît la somme simple, la somme triangulaire et la somme pyramidale de grandeurs, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, à partir de A_1, on connaîtra les mêmes sommes, pour les mêmes grandeurs, à partir de A_n.

Deuxième propriété. — Si les grandeurs proposées sont augmentées d'une même grandeur, on connaîtra les sommes simple, triangulaire et pyramidale, des nouvelles grandeurs.

Troisième propriété. — Si outre les sommes simple, triangulaire et pyramidale des grandeurs considérées, on connaît en

outre les sommes simple, triangulaire et pyramidale de leurs quarrés, on connaîtra les mêmes sommes pour les mêmes grandeurs augmentées d'une même grandeur.

Quatrième propriété. — Elle se rapporte au cas où les grandeurs considérées d'abord sont appliquées à d'autres grandeurs. Pascal ne prend pas le mot *appliquer* dans le sens que lui donnait Viète : appliquer deux grandeurs l'une à l'autre, c'est, pour lui, en faire un rectangle.

Traité des sinus du quart de cercle.

Pascal démontre d'abord que, si d'un point du quart de la circonférence on mène le sinus et la tangente, sur laquelle on prendra une longueur quelconque, le rectangle compris du sinus (on voit que les sinus sont encore des longueurs) et du segment pris sur la tangente sera égal au rectangle du rayon et de la projection du segment sur le diamètre auquel les sinus sont menés.

Cela posé, Pascal établit de proche en proche les propositions renfermées dans l'énoncé général suivant, qu'il donne d'ailleurs en terminant :

La somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des sinus d'un arc quelconque du quart de cercle est égale à la somme des puissances $(m-1)$ des ordonnées de cet arc, comprises entre les sinus extrêmes, multipliée par le rayon.

Pour l'intelligence de cet énoncé, il faut supposer que l'arc a été divisé en parties égales, que les sinus ont été menés des points de division, que la distance des pieds des sinus extrêmes a été divisée en parties égales aux parties de l'arc et que les ordonnées ont été menées des points de division.

Le théorème général alors se traduit par la formule

$$R^{m+1}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sin^m\varphi\,d\varphi = R\int_{x=R\cos\varphi_0}^{x=R\cos\varphi} y^{m-1}\,dx,$$

y désignant une ordonnée du quart de cercle ; mais Pascal supposant $R\,d\varphi$ égal à dx, les supprime dans les deux membres.

Si l'on fait dans cette formule $m = 1$, elle donne, en divisant par R^2,

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sin\varphi\,d\varphi = \Big[\cos\varphi\Big]_{\varphi_0}^{\varphi},$$

au signe près, dont Pascal ne tient jamais compte.

Si l'on y fait $m = 2$, elle donne pour

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sin^2\varphi\,d\varphi,$$

l'aire du segment du cercle de rayon 1, compris entre les sinus extrêmes, l'axe des x et l'arc du cercle.

Les démonstrations se font toujours par des considérations géométriques; nous ne les rapportons pas parce que, sur ce point, l'intérêt consiste surtout à savoir que Pascal soit allé aussi loin dans le calcul intégral.

Proposition V.

« Le centre de gravité de tous les sinus d'un arc quelconque, placés comme ils se trouvent, est dans celui qui divise en deux également la distance d'entre les extrêmes. »

Placés comme ils se trouvent signifie descendant des points qui divisent l'arc en parties égales; par conséquent le théorème signifie, en prenant les moments par rapport au diamètre paral-

lèle aux sinus considérés,

$$\frac{\int_{\varphi_0}^{\varphi} R\sin\varphi . R\,d\varphi . R\cos\varphi}{\int_{\varphi_0}^{\varphi} R\sin\varphi . R\,d\varphi} = \frac{R\cos\varphi_0 + R\cos\varphi}{2}$$

ou

$$\frac{\int_{\varphi}^{\varphi} \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi}{\int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin\varphi\, d\varphi} = \frac{\cos\varphi_0 + \cos\varphi}{2},$$

ce qui est évident.

La démonstration de Pascal est analogue à celle que l'on donne pour le centre de gravité de la zone. Toutefois elle repose sur la considération d'intégrales étudiées dans le *Traité des trilignes*.

Proposition VI.

« La somme des rectangles compris de chaque sinus sur la base et du sinus sur l'axe est égale à la moitié du quarré de la distance d'entre les sinus extrêmes sur la base, multipliée par le rayon, lorsque l'arc est terminé au sommet. »

C'est-à-dire

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} R\sin\varphi .\, R\cos\varphi . R\,d\varphi = \frac{1}{2} R(R\cos\varphi_0)^2.$$

Même remarque que pour la proposition V. Pour noter l'intégrale, nous avons supposé l'angle φ_0 plus grand que $\frac{\pi}{2}$, afin de pouvoir prendre les lignes trigonométriques dans leur véritable acception.

Proposition VII.

« La somme triangulaire des sinus sur la base d'un arc quelconque terminé au sommet, à commencer par le moindre des sinus extrêmes, est égale à la somme des sinus du même arc sur l'axe, multipliée par le rayon, ou, ce qui est la même chose, à la différence d'entre les sinus extrêmes sur la base, multipliée par le quarré du rayon. »

C'est-à-dire

$$\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} R\sin\varphi . R(\varphi - \varphi_0)\, R\, d\varphi = R\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} R\cos\varphi . R\, d\varphi$$
$$= R^2(R - R\sin\varphi_0)$$

ou

$$\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi(\varphi - \varphi_0)\, d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = 1 - \sin\varphi_0;$$

ce qui est évident, puisque

$$\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi(\varphi - \varphi_0)\, d\varphi = -[(\varphi - \varphi_0)\cos\varphi]_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi,$$

et que $(\varphi - \varphi_0)\cos\varphi$ est nul aux deux limites $\varphi = \varphi_0$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Les mêmes remarques subsistent que pour la proposition VI.

Proposition VIII.

« La somme pyramidale des sinus d'un arc quelconque terminé au sommet, à commencer par le moindre, est égale à l'excès dont l'arc surpasse la distance entre les sinus extrêmes, multiplié par le cube du rayon. »

C'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} R \sin\varphi . R^2(\varphi-\varphi_0)^2 R\, d\varphi = \left[R\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right) - R\cos\varphi_0\right] R^3,$$

ou

$$\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi(\varphi-\varphi_0)^2 d\varphi = \left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right) - \cos\varphi_0;$$

ce qui est facile à voir, parce que, d'abord,

$$\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi(\varphi-\varphi_0)^2\, d\varphi = -\frac{1}{2}[\cos\varphi(\varphi-\varphi_0)^2]_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi(\varphi-\varphi_0)\, d\varphi,$$

et se réduit à

$$\int^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi(\varphi-\varphi_0)\, d\varphi,$$

car $\cos\varphi(\varphi-\varphi_0)^2$ est nul aux deux limites $\varphi=\varphi_0$ et $\varphi=\frac{\pi}{2}$; et ensuite parce que

$$\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi(\varphi-\varphi_0)\, d\varphi = [\sin\varphi(\varphi-\varphi_0)]_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi$$

qui se réduit à

$$\frac{\pi}{2}-\varphi_0 + (\cos\varphi)_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}}, \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2}-\varphi_0-\cos\varphi_0.$$

$\frac{\pi}{2}-\varphi_0$ est l'angle au centre correspondant à l'arc dont parle Pascal.

Proposition IX.

« La somme des espaces compris entre l'axe et chacun des sinus d'un arc terminé au sommet est égale, étant prise quatre fois, au

quarré de l'arc plus le quarré de la distance entre les sinus extrêmes, multipliés chacun par le rayon. »

En effet, l'espace compris entre l'axe et le sinus correspondant à l'angle au centre φ, compté à partir du sommet, est

$$\frac{R^2}{2}(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi),$$

de sorte que l'énoncé du théorème se traduit par l'équation

$$4\int_0^{\varphi_0} R\,d\varphi\,\frac{R^2}{2}(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) = R^3(\varphi_0^2 + \sin^2\varphi_0),$$

parce que, l'arc étant compté du sommet, ce que Pascal appelle sinus est ce que nous nommons cosinus, et réciproquement, en sorte que la distance des sinus extrêmes de Pascal est, en réalité, $\sin\varphi_0$.

L'égalité précédente se réduit à

$$2\int_0^{\varphi_0} \varphi\,d\varphi + 2\int \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \varphi_0^2 + \sin^2\varphi_0,$$

et, ainsi, est évidente.

Proposition X.

« La somme triangulaire des mêmes espaces, prise quatre fois, à commencer par le moindre sinus, est égale au tiers du cube de l'arc, plus la moitié du solide compris de l'arc et du quarré du rayon, moins la moitié du solide compris du moindre sinus, de la distance d'entre les extrêmes et du rayon; le tout multiplié par le rayon. »

Quatre fois la somme simple des espaces en question, compris entre l'axe et le sinus (de Pascal) de l'angle φ, compté du sommet,

c'est-à-dire son cosinus, est, d'après le théorème précédent,

$$R^2(\varphi^2 + \sin^2\varphi);$$

si nous comptons l'angle à partir du rayon OA, l'expression précédente devra être remplacée par

$$R^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)^2 + R^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right);$$

cela posé, si nous appelons φ_0 le complément de l'angle compté du sommet par Pascal, le quadruple de la somme triangulaire des espaces en question sera

$$\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} R\varphi\left[R^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)^2 + R^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right]$$

ou

$$R^3\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)^2 + R^3\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)d\varphi;$$

c'est-à-dire

$$\frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right)^3 + R^3\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)d\varphi$$

ou

$$\frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right)^3 - R^3\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)d\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right);$$

mais

$$\int\sin^2 x\,dx = -\sin x\cos x + \int\cos^2 x\,dx,$$

d'où

$$\int\sin^2 x\,dx = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}\int dx;$$

et, par conséquent,

$$-\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) d\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\varphi\right]_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right).$$

Donc, en résumé, la formule du quadruple de la somme triangulaire des espaces considérés est bien

$$\frac{1}{3}\left[R\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right)\right]^3 + \frac{1}{2}R\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right)R^2 - \frac{1}{2}R\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right)R\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right)R$$

ou

$$\frac{1}{3}(R\varphi)^3 + \frac{1}{2}(R\varphi)R^2 - \frac{1}{2}(R\sin\varphi)(R\cos\varphi)R,$$

φ désignant l'angle dont parle Pascal.

Proposition XI.

« La somme triangulaire des quarrés des sinus d'un arc quelconque, terminé au sommet, à commencer par le moindre sinus, est égale, étant prise quatre fois, au quarré de l'arc plus le quarré de la distance entre les sinus extrêmes, multipliés chacun par le quarré du rayon. »

En effet, Pascal a déjà trouvé pour la somme simple des quarrés de ces sinus, qui sont les cosinus des parties de son arc $R\varphi$,

$$\frac{1}{2}R(R\varphi) + \frac{1}{2}(R\sin\varphi)(R\cos\varphi),$$

ou, en rétablissant la notation adoptée dans la démonstration de la proposition précédente, afin d'éviter toute confusion,

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{R}.\mathrm{R}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right)+\frac{1}{2}\,\mathrm{R}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right)\mathrm{R}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right),$$

φ_0 désignant le complément de l'angle φ de Pascal.

On obtiendra donc la somme triangulaire cherchée en ajoutant les deux intégrales

$$\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\mathrm{R}\,d\varphi$$

et

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{R}^2\int^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\mathrm{R}\,d\varphi,$$

c'est-à-dire

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{R}^3\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)d\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$$

et

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{R}^3\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)d\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),$$

dont les valeurs sont

$$\frac{\mathrm{R}^3}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{R}^3}{4}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right);$$

le quadruple de la somme triangulaire des quarrés des sinus de l'arc $\mathrm{R}\varphi$ est donc bien

$$\mathrm{R}[(\mathrm{R}\varphi)^2+(\mathrm{R}\sin\varphi)^2].$$

Toutes les intégrales qu'on a vues dans ce qui précède se trouvent indiquées dans les énoncés de Pascal, que nous avons exprès reproduits textuellement, afin de ne laisser subsister aucun doute à cet égard. Elles ne sont, il est vrai, notées sous aucun signe sommatoire, mais il est bien clair qu'en les écrivant sous la forme moderne, nous ne les avons pas plus altérées que nous n'y avons ajouté, la différentielle de la variable, dont Pascal ne parle jamais étant toujours sous-entendue par lui, comme il le rappelle souvent.

Quant aux intégrations, Pascal les fait à l'aide de considérations géométriques, c'est-à-dire en disposant ses figures assez habilement pour que les sommes qu'il recherche deviennent tangibles. On ne peut donc pas dire qu'il ait inventé le *Calcul intégral*, en ce sens que ce n'est pas par *calcul* qu'il intègre, mais il faut reconnaître qu'il a introduit la considération d'un grand nombre d'intégrales, qu'il les a comparées les unes aux autres, qu'il les a transformées les unes dans les autres, et enfin qu'il les a évaluées.

Sans doute, en fait de découvertes, le procédé n'est pas chose indifférente : car la connaissance de nos méthodes abstraites met l'intégration à la portée de tout le monde, tandis qu'il faudrait au moins une grande intelligence pour se servir de la méthode que Pascal avait trouvée dans son génie. Mais la découverte, une fois faite, subsiste et il est ensuite facile de rectifier le procédé. Je ne dis pas cela pour rabaisser la gloire des inventeurs de l'analyse infinitésimale : le grand mérite de Leibniz est d'avoir créé la méthode différentielle dans ses deux grandes divisions. L'intégration des différentielles n'en forme qu'un tout petit chapitre.

J'ajoute que les intégrales doubles que j'ai formulées plus haut

se trouvent aussi dans Pascal. Non seulement il considère une somme triangulaire comme une somme de sommes simples, mais il l'obtient, comme je l'ai fait par exemple dans la proposition X du *Traité des sinus*, par deux intégrations superposées.

Traité des arcs de cercle.

Les propositions contenues dans ce traité se rapportent à un triligne circulaire, c'est-à-dire à un demi-segment de cercle à une base. La demi-corde est la base du triligne, la flèche de l'arc est l'axe.

Presque toutes ces propositions sont très faciles et je me bornerai le plus souvent à en rapporter les énoncés, en les abrégeant.

Proposition I.

L'axe du triligne étant divisé en un nombre indéfini de parties égales, si l'on mène, par les points de division, les ordonnées à l'axe, lesquelles diviseront l'arc en parties : la somme de ces ordonnées (multipliée par leur intervalle) sera égale au rectangle du rayon et de la base; la somme de leurs quarrés (multipliée par le même intervalle) sera égale au solide fait du rayon et du triligne, augmenté du rectangle de sa base et de la différence entre son axe et le rayon du cercle; la somme des cubes des mêmes ordonnées (multipliée toujours par le même intervalle) sera aussi donnée; ainsi que la somme triangulaire des mêmes ordonnées, leur somme pyramidale et la somme triangulaire de leurs quarrés.

Proposition II.

Dans la proposition précédente, l'axe du triligne était supposé moindre que le rayon; Pascal le suppose maintenant plus grand.

Lemme I.

Si une aire plane S est divisée en parties s_1, s_2, ..., et si les distances des centres de gravité de cette aire et de ses parties à un axe contenu dans son plan sont x, x_1, x_2, ..., on aura l'égalité

$$Sx = s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots .$$

C'est le théorème des moments.

Lemme II.

Si un secteur circulaire est divisé en une infinité de petits secteurs égaux, les centres de gravité de ces petits secteurs sont distribués également sur l'arc dont le rayon serait les deux tiers du rayon du secteur proposé.

Proposition III.

Si l'on considère un secteur circulaire OAB, dont l'arc soit divisé en une infinité de parties égales, la somme des secteurs compris entre le rayon OA et chacun de ceux qui seraient menés aux points de division (multipliée par une des divisions) est égale au quart du quarré de l'arc AB, multiplié par le rayon.

Proposition IV.

La somme triangulaire des mêmes secteurs (multipliée par le quarré d'une des divisions) est égale au douzième du cube de l'arc, multiplié par le rayon.

Proposition V.

La somme des solides compris des mêmes secteurs et de leurs bras respectifs sur OA (multipliée par une des divisions de l'arc)

est égale au produit du cube du rayon par le tiers de l'arc, diminué du tiers de son sinus-verse.

Proposition VI.

La somme des solides compris des mêmes secteurs et de leurs bras respectifs sur le rayon perpendiculaire à OA (multipliée toujours par une des divisions de l'arc) est égale au cube du rayon, multiplié par le tiers du sinus-verse de l'arc.

Proposition VII.

Si des points de division de l'arc on abaisse des perpendiculaires sur le rayon perpendiculaire à OA, lesquelles seront les cosinus des arcs compris entre l'extrémité A de l'arc et les points de division, la somme des triangles rectangles compris entre le rayon mené au point de division, le cosinus dont il vient d'être parlé et le sinus correspondant (multipliée par une des divisions de l'arc) sera égale au quart du produit du rayon par le sinus de l'arc entier.

Proposition VIII.

La somme triangulaire des mêmes triangles (multipliée par le quarré d'une des divisions de l'arc) sera égale au produit du cube du rayon par la huitième partie de l'arc, moins la huitième partie du produit du quarré du rayon par le rectangle du sinus et du cosinus de l'arc entier.

Proposition IX.

La somme des solides faits des mêmes triangles et de leurs bras respectifs sur OA (multipliée par une des divisions de l'arc) est égale au tiers du cube du rayon multiplié par le sinus de l'arc, moins

le tiers du produit du rayon par la somme des quarrés des sinus des arcs comptés du point A (multipliée par une des divisions).

Proposition X.

Théorème analogue, les bras étant pris par rapport au rayon perpendiculaire à OA.

Proposition XI.

Dans cette proposition et les trois suivantes, Pascal revient sur la théorie des trilignes circulaires pour la compléter. Soit CAB le triligne, dont AB est l'arc, CB l'axe et CA la base; l'axe CB est divisé en une infinité de parties égales et, par les points de division, sont menées les ordonnées perpendiculaires à l'axe. Pascal détermine successivement la somme des rectangles de ces ordonnées et des arcs correspondants, comptés du sommet B; la somme des solides de ces ordonnées et des quarrés des arcs correspondants; la somme des solides des quarrés des ordonnées et des arcs; enfin la somme triangulaire des rectangles compris des ordonnées et des arcs correspondants : chacune de ces sommes, bien entendu, étant multipliée par une des divisions de l'axe, pour les trois premières, et par le quarré de cette division pour la quatrième.

Propositions XV et XVI.

Le triligne dépasse le quart de cercle et Pascal reprend, pour ce cas, les propositions XI et XIV.

Traité des solides circulaires.

Pascal y détermine les centres de gravité des deux solides engendrés par un triligne circulaire tournant successivement autour de

son axe et autour de sa base, les centres de gravité de la moitié du premier de ces solides et de sa surface, etc.

Traité de la roulette.

On comprendra sans peine que les problèmes de la roulette se trouvent d'avance résolus par les belles théories que nous avons essayé de résumer.

Nous ne suivrons donc pas Pascal dans l'application qu'il fait de sa méthode aux questions spéciales dont il s'agit.

Nous nous bornerons à cette observation que Pascal s'est strictement limité, dans sa théorie, à ce qui était nécessaire pour la résolution des questions qu'il avait en vue par rapport à la roulette. Cette théorie n'en forme pas moins un ensemble relativement complet et d'ailleurs très satisfaisant; mais beaucoup de parties qui la composent ne pourraient pas être utilisées dans des recherches différentes; par exemple, la théorie des onglets n'a trait qu'à l'évaluation des volumes des demi-solides de révolution et à la détermination de leurs centres de gravité. Or Pascal aurait probablement pu aborder avec quelque succès le problème général des quadratures, des cubatures, des rectifications et des centres de gravité.

Quant à l'invention des sommes triangulaires et pyramidales, elle est très belle et appartient à la méthode, considérée dans ce qu'elle a de plus général, puisqu'elle tendait à l'introduction des intégrales doubles et triples.



COLLINS.

(Né près d'Oxford en 1624, mort en 1683.)

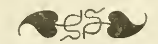
Surnommé le Mersenne anglais; il fut admis en 1667 à la Société royale de Londres, il est surtout connu par le *Commercium epistolicum*, recueil de lettres relatives aux discussions qui eurent lieu entre Leibniz et Newton, au sujet de l'invention des nouveaux calculs.



GUARINI (CAMILLE).

(Né à Modène en 1624, mort à Milan en 1683.)

Théatin. Outre des ouvrages sur l'architecture et la religion, il a laissé : *Euclides adauctus et methodicus* (1671), où l'on remarque l'indication de procédés analogues à ceux de notre Géométrie descriptive; *Mathematica cælestis* (1683), que Lalande cite avec éloges, et *Trattato di fortificazione* (1676).



SYDENHAM (THOMAS).

(Né à Winford-Eagle, comté de Dorset, en 1624, mort à Londres en 1689.)

Il définit la maladie un effort de la nature qui, pour conserver le malade, travaille de toutes ses forces à évacuer la matière morbifique. Les maladies viennent en partie de ce que certaines particules de l'air, qui ne sont point analogues avec nos humeurs, s'insinuent dans le corps et, se mêlant avec le sang, l'infectent et le corrompent; et en partie de différentes fermentations ou même de différentes pourritures d'humeurs qui séjournent trop longtemps dans le corps.

Il s'occupa beaucoup des épidémies et des influences qu'exer-

cent, sur leur malignité ou leur bénignité relative, les saisons et l'état de l'atmosphère.

Il montra combien, dans un même pays, une même maladie peut varier aux diverses époques de l'année, et indiqua les changements à faire subir au traitement, selon les circonstances. « Il y a, dit-il, des maladies qui attaquent dans tous les temps ; mais il en est d'autres et en aussi grand nombre, qui suivent des temps particuliers de l'année. Très peu de médecins ont eu égard aux influences des saisons sur les maladies. »

Nous trouvons dans les *Révolutions de la médecine* de Cabanis ce jugement sur Sydenham : « Sa pratique fit une véritable révolution dans la Médecine. Ce fut le triomphe, non d'un génie transcendant qui renouvelle tout par des vues générales et hardies, mais d'un observateur qui pénètre avec sagacité, fouille avec sagesse et s'appuie toujours sur une méthode sûre. Les théories de Sydenham étaient, il faut l'avouer, mesquines, ou même fausses ; et hors de son empirique, dans lequel un instinct précieux lui tenait lieu de tout, ses idées étaient en général étroites ; cependant aucun médecin n'eut jamais une plus utile influence sur cette partie de l'art qui est le but de toutes les autres, sur la pratique ; aucun ne mérita mieux, à cet égard, le titre de régénérateur. »

Il inventa la préparation de laudanum qui porte son nom, et indiqua la meilleure manière de prendre le quinquina, c'est-à-dire après l'accès.

Sa doctrine générale était d'employer les débilitants dans les affections aiguës et les fortifiants dans les maladies chroniques.



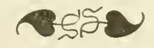
JEAN DE WITT.

(Né en 1625, mort en 1672.)

Il s'était adonné avec succès à la Géométrie, avant de prendre part à la direction des affaires de son pays. Lié avec Descartes, il s'était employé à répandre les méthodes de la nouvelle Géométrie et Schooten nous a conservé un traité de lui intitulé *Elementa curvarum* en deux livres, dont le premier contient une théorie particulière des coniques et le second la construction des racines des équations, par des intersections de courbes, avec des détails nouveaux.

Il s'occupa aussi de la détermination de la durée moyenne de la vie et du prix des rentes viagères.

On sait qu'il périt victime d'une insurrection provoquée par la maison d'Orange.



BARTHOLIN (ERASME).

(Né à Roskild en 1625, mort à Copenhague en 1698.)

Fils et frère de médecins connus et médecin lui-même. Il enseigna tour à tour à Copenhague la Géométrie et la Médecine. Il est surtout connu pour avoir observé le premier et décrit le phénomène de la double réfraction, dans le spath d'Islande, qui resta, jusqu'à Huyghens, le seul corps nouveau possédant cette remarquable propriété.

Ses principaux ouvrages sont : *De cometis annorum* 1664 *et* 1665; *Experimenta crystalli Islandici* (1669); *Determinationes æquationum; Selecta geometrica; De problematibus geometricis per Algebram solvendis dissertationes VIII.*

Il était lié avec de Beaune et fut chargé par les héritiers de celui-ci de la collation et de la publication de ses manuscrits.



CASSINI (JEAN-DOMINIQUE).

(Né à Perinaldo, comté de Nice, en 1625, mort à Paris en 1712.)

Son éducation, faite chez les jésuites de Gênes, fut très soignée, particulièrement sous le rapport littéraire ; mais l'Astronomie, à laquelle il se trouva accidentellement initié par quelques lectures faites en dehors des leçons de ses maîtres, produisit sur lui une telle impression qu'il s'y adonna tout entier.

Sa vie n'est en quelque sorte composée que d'événements heureux. Dès sa sortie du collège, les protecteurs lui arrivent en foule ; il n'y a pas jusqu'aux religieuses qui ne s'en mêlent. Le sénateur de Bologne, marquis Malvasia, qui faisait construire un observatoire dans cette ville, l'appelle auprès de lui : il était un peu astrologue, Cassini a le bonheur de le ramener à des études plus sérieuses, et il s'en fait un ami dont l'influence lui vaut, à vingt-cinq ans, l'honneur d'être choisi par le Sénat pour succéder à Cavalieri dans la chaire d'Astronomie (1650). Bientôt après (1655), il obtient l'autorisation de faire disposer à l'église de Saint-Pétrone un immense gnomon. Ces appareils commençaient à être abandonnés en France ; mais la grandeur de celui-ci frappa les esprits et servit à la réputation de son auteur. Il est vrai que les observations qu'il put faire à l'aide de son gigantesque instrument permirent de constater avec plus d'exactitude qu'on ne l'avait encore fait la loi du mouvement du Soleil, et à confirmer un point fondamental de la théorie de Képler, savoir le

ralentissement du mouvement, durant le plus grand éloignement du Soleil, et l'accélération durant la période inverse. Il employa cet appareil pour vérifier l'obliquité de l'écliptique, qu'on supposait généralement de 23°30′ et qu'il fixe, pour l'année 1660, à 23°28′42″, et pour construire une bonne table des réfractions. Il jugeait alors la parallaxe du Soleil presque insensible ; elle est en effet beaucoup plus petite que ne l'avaient cru ses devanciers. Il trouva depuis, par d'autres méthodes, qu'elle n'est guère que de 10″, ce qui approche de la vérité. Il corrigea aussi l'excentricité de l'orbite solaire, à laquelle Képler avait donné la valeur 0,018, et la réduisit à 0,017.

Cassini présentait au Pape, vers la même époque, un *Système du mouvement spiral des planètes, dans l'hypothèse de la Terre stable.*

Il est assez singulier qu'aucun des écrits postérieurs de Cassini ne puisse permettre de décider s'il admettait ou s'il rejetait le système de Copernic. Il paraît avoir suivi toute sa vie cette maxime prudente qu'un propriétaire philosophe a fait graver, en 1855, sur sa maison, rue de Rivoli, au-dessous du cadran solaire qui en décore la façade : *Vera intuere, media sequere.*

Cassini avait fait sur la comète de 1662 une mauvaise dissertation qui néanmoins avait excité l'admiration générale. Lors de l'apparition de celle de 1664, la reine Christine se trouvait en Italie ; Cassini, sans observations suffisantes, et d'ailleurs sans méthode pour résoudre le problème, se hasarda imprudemment à prédire à la reine la route que suivrait l'astre, et il eut le bonheur de tomber à peu près juste. Il attribuait encore aux comètes une trajectoire rectiligne, mais supposait leur mouvement uniformément varié. Ces hypothèses ne s'accordent du reste pas trop

mal avec la réalité, lors du moins que la comète est suffisamment éloignée de son périhélie.

De 1664 à 1667, il détermina avec assez d'exactitude les durées des rotations de Jupiter, de Mars et de Vénus, et donna ses premières *Éphémérides* des satellites de Jupiter, qu'il revit et perfectionna plus tard en France.

Louis XIV le mit au nombre des membres de l'Académie des Sciences, et le *Journal des Savants* publia, bientôt après, sa théorie de la libration de la Lune, qui est un de ses bons travaux d'observation.

En 1669, le Pape, cédant aux sollicitations de la France, permit à Cassini d'accepter la direction de l'Observatoire de Paris. On lui conserva les appointements de ses places en Italie, et Colbert lui fit donner, en France, une pension de 9000 livres.

De 1671 à 1673, il découvrit quatre nouveaux satellites de Saturne (Huyghens avait découvert le sixième) et détermina les périodes de leurs révolutions; ce sont le huitième, ou le plus éloigné de la planète, qui fait sa révolution en $79^j,33$; le cinquième, qui n'y emploie que $4^j,52$; le quatrième, qui y met seulement $2^j,74$; et le troisième, qui achève la sienne en $1^j,89$. (Le premier et le second ont été découverts par Herschel, le septième par M. Lassell, en 1848.)

Il avait déjà observé la lumière zodiacale en 1668; il l'étudia de nouveau en 1683, et reconnut qu'elle se trouve dans l'équateur solaire. De 1683 à 1700, il s'occupa de prolonger la méridienne de Picard.

De cette simple énumération des travaux de Cassini, il ressort que ce savant n'a rien ajouté aux théories astronomiques. Il a

joui cependant d'une immense réputation, tandis que Picard et Rœmer, bien mieux doués de l'esprit vraiment scientifique, restaient à peu près obscurs. Du reste Cassini savait les tenir lui-même à l'écart.

Cassini, n'étant ni géomètre, ni analyste, ne pouvait être qu'observateur : on doit lui accorder ce titre ; mais il convient de remarquer, d'une part, que son attachement aux anciennes méthodes ne lui permit pas d'atteindre au degré d'exactitude qu'on pouvait déjà obtenir de son temps, et, de l'autre, que ses observations eurent plus souvent pour objet des phénomènes isolés ou accidentels que ceux qui, plus communs, ne frappent pas le vulgaire, mais retiennent le vrai savant, parce que la découverte des lois qui les régissent est le grand problème de la Science. La seule découverte importante qu'il eût pu faire, il la manqua : il aurait eu, paraît-il, en même temps que Rœmer, l'idée qui conduisit ce dernier à la découverte de la vitesse de la lumière. Non seulement il rejeta cette idée, mais il prit ensuite parti contre Rœmer.

La rare fortune de Cassini se prolongea pour lui en quelque sorte au delà de la mort ; car son fils et son petit-fils, admis à l'Académie des Sciences, l'un à dix-sept ans, et l'autre à vingt et un ans, héritant de ses places, de ses honneurs et de son influence, purent veiller à la conservation de sa gloire. Jusqu'en 1800, tous les savants en France restent prosternés devant sa mémoire. Lalande dit de lui : « Ce grand homme fut la principale gloire du règne de Louis XIV dans l'Astronomie, et le nom de Cassini est presque synonyme en France avec celui de créateur de l'Astronomie ; » et Fontenelle, en 1712, longtemps après la publication des ouvrages de Newton et de Halley, accumule

les hyperboles les plus outrées pour vanter ses mauvais opuscules sur les comètes.

On a de Cassini un grand nombre de mémoires et de dissertations qui n'ont jamais été réunis en corps d'ouvrage. Nous citerons : *Observationes cometæ* (Modène, 1653, in-fol.); *Opera astronomica* (Rome, 1666, in-fol.), où se trouvent tous les opuscules qu'il avait publiés jusqu'à cette date ; *Découverte de deux nouvelles planètes autour de Saturne* (Paris, 1673); *De l'origine et du progrès de l'Astronomie* (1693) ; *Règles de l'astronomie indienne ;* les *Hypothèses et les tables des satellites de Jupiter.*

Cassini avait écrit lui-même sa vie, qui a été insérée dans les *Mémoires pour servir à l'Histoire des Sciences,* par Cassini de Thury.

BUONO (PAUL DEL).

(Né à Florence en 1625, mort à Vienne vers 1662.)

Disciple de Galilée, il institua des expériences pour démontrer l'incompressibilité de l'eau et s'occupa beaucoup de faire éclore les œufs par la chaleur artificielle ; il est mort président de la Monnaie à Vienne.



REDI (FRANCISCO).

(Né à Arezzo en 1626, mort à Pise en 1698.)

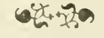
Il reçut à Pise le grade de docteur. Il obtint peu après les bonnes grâces du grand-duc, Ferdinand II, qui le nomma son premier médecin, et de son frère le prince Cardinal Léopold, fondateur de l'Academia del Cimento.

Il débuta par des recherches sur le venin de la vipère où il démontrait que ce venin est inoffensif lorsqu'on l'avale et ne devient dangereux que lorsqu'il est directement porté dans le sang, par la morsure par exemple.

Il s'occupa ensuite beaucoup de la génération; presque tous les naturalistes de son temps croyaient à la génération spontanée des animaux inférieurs qui naissent sur les débris des matières organiques et animales. « Si j'expose à l'air, par un temps chaud, des viandes, elles fourmillent de vers au bout de peu de jours, dit Redi; on prétend que ces vers sont nés spontanément de la chair corrompue; mais si je place les mêmes matières dans un vase dont je ferme l'ouverture avec une fine gaze, les vers ne se forment plus et cependant les matières se putréfient comme auparavant; il en résulte que les vers ne sont pas engendrés par la corruption et qu'il en faut attribuer la formation à quelque chose qui est arrêté par la gaze. Mais la gaze n'arrête ni les fluides aériformes ni les liquides; ce quelque chose doit donc consister en particules solides trop grosses pour traverser les mailles de la gaze. »

Redi aperçut bientôt après, sur la gaze, les œufs des mouches qui avaient essayé de pénétrer jusqu'à la viande.

Les œuvres de Redi ont été publiées en trois volumes à Venise en 1712.



BOYLE (ROBERT).

(Né à Lismore (Irlande) en 1627, mort à Londres en 1691.)

Il ouvre la série des chimistes modernes, et fut également un physicien très distingué.

C'est chez lui que se forma le premier noyau de la Société royale de Londres, sous Charles II.

Boerhave l'appelle l'ornement de son siècle. Ses écrits parurent d'abord en anglais en 1661, 1663 et 1669; ils furent traduits en latin et publiés à Cologne en 1668, à Venise en 1695, à Genève en 1714. Il en existe aussi une édition en français publiée à Paris, en 1679. La dernière édition, la plus complète, a été donnée à Londres, en 1744, et forme cinq volumes in-folio.

Boyle fut un des partisans les plus convaincus de la nécessité de recourir à l'expérience dans toutes les recherches physico-chimiques et même médicales; il attribuait à l'action des ferments, dans les phénomènes vitaux, une importance à laquelle on n'a ajouté foi que beaucoup trop tard.

Sans bien savoir quels pouvaient être les corps simples, il admettait qu'il pût y en avoir un certain nombre.

Il n'acceptait que sous bénéfice d'inventaire les analyses faites par le feu : « ainsi, dit-il, le bois de gaiac brûlé à feu nu se réduit en cendres et en suie, tandis que, distillé, il donne de l'huile, du vinaigre, de l'eau, du charbon et des gaz. » Et ailleurs : « Vous composez du savon avec de la graisse et de l'alcali; mais ce savon chauffé dans une cornue donne des éléments tout nouveaux, qui ne ressemblent ni à la graisse ni à l'alcali employés. »

Il a le premier caractérisé la différence qui existe entre les simples mélanges et les combinaisons : « Dans un mélange, chacun des corps conserve ses propriétés caractéristiques; tandis que, dans une combinaison, ils les perdent. Ainsi le sucre de Saturne est formé d'une combinaison de vinaigre et de litharge qui n'ont ni l'un ni l'autre la saveur sucrée.

Il attira vivement l'attention sur le rôle de l'air atmosphérique dans les réactions chimiques, par des expériences faites avec

soin, soit sous le récipient de la machine pneumatique, soit dans des vases renversés sur une cuve à eau ou à mercure, soit dans des vases hermétiquement clos.

Il conclut d'expériences nombreuses que c'est seulement une partie de l'air qui entretient la respiration. Il dit ailleurs : « Le vert de gris et la rouille de fer sont engendrés par des effluves corrosifs de l'air. C'est l'étude de ces corps qui nous fera un jour connaître la composition de l'air; » il fit de nombreuses expériences sur l'augmentation de poids que subissent les métaux calcinés.

Il étudia avec soin les produits de la distillation des bois et y reconnut l'esprit inflammable (alcool) et le vinaigre de bois.

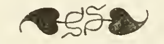
Il imagina l'usage du sirop de violettes pour distinguer les acides des alcalis.

Il fit le premier la synthèse du nitre; reconnut la présence de l'arsenic blanc dans quelques eaux minérales; enseigna le moyen de reconnaître des traces de sel de cuisine dans l'eau, au moyen du nitrate d'argent; admit la composition de l'eau; découvrit la chaux dans les calculs urinaires; publia le premier la préparation du phosphore qu'il avait retrouvée sur des indications vagues de Krafft; enfin il a donné son nom à un produit pharmaceutique encore en usage, la *liqueur fumante de Boyle.*

Il enseigna le premier à recueillir les gaz dans des cloches, sur la cuve à eau. Il découvrit les mélanges réfrigérants et proposa d'adopter pour point fixe dans la graduation du thermomètre le point de congélation de l'eau. Il constata que la congélation comme l'ébullition de l'eau sont retardées par l'addition d'une dissolution saline; il reconnut aussi que l'eau se dilate en se congelant.

Il disait : « Si les hommes avaient plus à cœur les progrès de la vraie Science que leur propre réputation, il serait aisé de leur faire comprendre que le plus grand service qu'ils pourraient rendre au monde, ce serait de mettre tous leurs soins à faire des expériences, à recueillir des observations, sans chercher à établir aucune théorie. »

Sans doute les théories auxquelles songe Boyle sont destinées à s'écrouler bientôt les unes sur les autres, mais elles rendent au moins le service, en passionnant les uns et irritant les autres, de stimuler le zèle de tout le monde à la recherche des preuves pour ou contre. Au reste, c'est une chimère d'espérer que les esprits actifs, après avoir réduit en théorie les questions accessibles, résisteront à la tentation de faire des théories sur les questions inaccessibles. Le cerveau humain a horreur du vide.



MALPIGHI (MARCEL).

(Né près de Bologne en 1628, mort à Rome en 1694.)

Il fut successivement professeur à Bologne, à Pise et à Messine, puis devint premier médecin d'Innocent XII. Il s'est illustré par ses études des tissus animaux et végétaux, à l'aide du microscope. Il reconnut que les poumons se composent d'une multitude de cellules en communication avec les bronches. En examinant des poumons de grenouilles, il remarqua, dit M. Papillon [1], que le sang chassé par le cœur circule dans les vaisseaux des

[1] Histoire de la Philosophie moderne dans ses rapports avec le développement des sciences de la nature, ouvrage posthume publié par M. Charles Lévêque, Membre de l'Institut. Hachette 1876.

organes respiratoires et passe des artères aux veines, par l'intermédiaire des petits vaisseaux, jusqu'alors inaperçus, qu'on nomme les capillaires.

Il montra que la bile, avant de se réunir dans la vésicule qui la contient, est secrétée par le tissu même du foie.

On croyait avant lui que l'épiderme des nègres est noir; il fit voir que leur couleur est due à une matière secrétée par une membrane interposée entre la peau et l'épiderme.

Il fonda en quelque sorte l'anatomie des insectes. Il découvrit notamment les stigmates situés aux deux côtés du corps, par lesquels ces animaux respirent, et fit voir que l'air inspiré se rend, par les trachées, dans toutes les parties de leur organisme. Il aperçut aussi le double cordon et les ganglions qui constituent le système nerveux des insectes.

Ses œuvres ont été publiées par la Société royale de Londres, en 1686, et complétées en 1697 par des mémoires posthumes, publiés également à Londres.

Malpighi s'était aussi occupé d'embryogénie.

FIN DE LA QUATRIÈME PARTIE.



TABLE ALPHABÉTIQUE.

